Loeb 空間と選択公理

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2015 年 12 月 13 日

定義. X を位相空間とし，X の空でない閉集合全体のなす集合を $\mathcal{A}_X^0$ で表す．

1. X が Loeb 空間 $\iff \mathcal{A}_X^0$ が選択関数を持つ．
2. X が弱 Loeb 空間
   $\iff \mathcal{A}_X^0$ が以下を満たす関数 $f\colon \mathcal{A}_X^0 \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ を持つ．

$$\text{任意の } F \in \mathcal{A}_X^0 \text{ に対して } 0 < |f(F)| < \infty \text{ かつ } f(F) \subset F$$

例 1. X を位相空間とする．X が整列可能ならば X は Loeb 空間である． □

例 2. $\mathbb{R}$ は Loeb 空間である． □

例 3. X を任意の集合とする．X に離散位相を入れて Alexandroff の一点コンパクト化 $\bar{X} = X \cup \{\infty\}$ を考える．$\mathcal{A}_{\bar{X}}^0 = \{Y \subset X \mid |Y| < \infty\} \cup \{Y \cup \{\infty\} \mid Y \subset X\}$ だから，$\bar{X}$ は弱 Loeb 空間である． □

定理 4. 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 選択公理
2. 任意の位相空間は Loeb 空間である．
3. 離散位相空間は Loeb 空間である．
4. 任意の位相空間は弱 Loeb 空間である．
5. 離散位相空間は弱 Loeb 空間である．

証明. $1 \Longrightarrow 2$ と $2 \Longrightarrow 3$ は明らか.

($3 \Longrightarrow 1$) $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を互いに素な非空集合の族とする．$X := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ に離散位相を入れる．仮定により X は Loeb 空間である．故に $\mathcal{A}_X^0$ が選択関数を持つから，

$\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{A}_X^0$ も選択関数を持つ．

$1 \Longrightarrow 4$ と $4 \Longrightarrow 5$ も明らか．

$(5 \Longrightarrow 1)$ $3 \Longrightarrow 1$ と同様にして $5 \Longrightarrow$ AMC が分かるから，選択公理と AMC が同値であることより従う． □

定理 5. 選択公理
$\Longleftrightarrow$ 弱 Loeb 空間の開部分空間は弱 Loeb 空間である．

証明. $(\Longrightarrow)$ 明らか．

$(\Longleftarrow)$ 離散位相空間 X が弱 Loeb 空間であることを示せばよい．例 3 で述べたようにコンパクト化 $\bar{X}$ は弱 Loeb 空間である．故に仮定から開部分空間 $X \subset \bar{X}$ も弱 Loeb 空間である． □

定理 6. 次の命題は (ZF 上) 同値．

1. 選択公理
2. 任意のコンパクト Hausdorff 空間は，整列可能な稠密部分集合を持つ．
3. 任意のコンパクト Hausdorff 空間は，整列可能な基底を持つ．
4. コンパクト Hausdorff 空間の任意の点は，整列可能な基本近傍系を持つ．

証明. $(1 \Longrightarrow 2)$ 明らか．

$(2 \Longrightarrow 1)$ 離散位相空間 X が Loeb 空間であることを示せばよい．コンパクト化 $\bar{X}$ はコンパクト Hausdorff であるから，仮定より整列可能な稠密部分集合 $D \subset \bar{X}$ を持つ．しかし $\bar{X}$ の稠密な部分集合は定義から X か $\bar{X}$ しかない．従って X は整列可能であり，Loeb 空間であることが分かる．

$(1 \Longrightarrow 3)$ 明らか．

$(3 \Longrightarrow 1)$ $\bar{X}$ の基底は $\big\{\{x\} \bigm| x \in X\big\}$ を含むので X は整列可能である．

$(1 \Longrightarrow 4)$ 明らか．

$(4 \Longrightarrow 1)$ 離散位相空間 X が弱 Loeb 空間であることを示せばよい．コンパクト化 $\bar{X} = X \cup \{\infty\}$ はコンパクト Hausdorff であるから，$\infty \in \bar{X}$ は整列可能な基本近傍系 $\mathcal{N}$ を持つ．$\mathcal{N}$ の整列順序を一つ定めておく．$\bar{X}$ の定義から各 $U \in \mathcal{N}$ に対して $|X \setminus U| < \infty$ である．そこで $F \in \mathcal{A}_X^0$ に対して $f(F) := F \setminus \min\{U \in \mathcal{N} \mid F \not\subset U\}$ と定めれば $0 < |F| < \infty$ かつ $f(F) \subset F$ である． □

定理 7. 次の命題は (ZF 上) 同値．

1. 選択公理
2. Loeb 空間の直積は Loeb 空間である．
3. Loeb 擬距離空間の直積は Loeb 空間である．

証明． 1⟹2 と 2⟹3 は明らか．

(3 $\Longrightarrow$ 1) $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を非空集合の族とする．$Y_\lambda := X_\lambda \cup \{\infty\}$ に擬距離 d_λ を

$$d_\lambda(x,y) := \begin{cases} 0 & (x, y \in X_\lambda \text{ または } x = y = \infty) \\ 1 & (x = \infty,\ y \in X_\lambda \text{ または } x \in X_\lambda,\ y = \infty) \end{cases}$$

で定める．(Y_λ, d_λ) は Loeb 擬距離空間である．

$\because$) $\mathcal{A}^0_{Y_\lambda} = \{X_\lambda, \{\infty\}, Y_\lambda\}$ より分かる．

$Y := \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ を擬距離空間 Y_λ の直積とすれば，仮定より Loeb 空間である．$\pi_\lambda\colon Y \longrightarrow Y_\lambda$ を標準射影として，$A_\lambda := \pi_\lambda^{-1}(X_\lambda)$ と置く．$A_\lambda \subset Y$ は閉集合だから，Y が Loeb 空間であることより $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の選択関数 g が存在する．このとき $f(\lambda) := \pi_\lambda(g(\lambda))$ と定めれば f が $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の選択関数である． □

命題 8. Loeb Hausdorff 空間の直積は Loeb 空間
$\Longrightarrow$ 非空整列可能集合の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は選択関数を持つ．

証明． $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を非空整列可能集合の族とする．どの X_λ にも含まれない元 ∞ を取り $Y_\lambda := X_\lambda \cup \{\infty\}$ に離散位相を入れるとこれは Loeb Hausdorff 空間である．よって直積空間 $Y := \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ は Loeb 空間である．そこで $g\colon \mathcal{A}^0_Y \longrightarrow Y$ を選択関数とし，$\pi_\lambda\colon Y \longrightarrow Y_\lambda$ を標準射影とする．Y の定義から明らかに，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $\pi_\lambda^{-1}(X_\lambda) \in \mathcal{A}^0_Y$ である．よって $f\colon \Lambda \longrightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を $f(\lambda) := \pi_\lambda(g(\pi_\lambda^{-1}(X_\lambda)))$ で定めれば f が選択関数である． □

命題 9. Loeb Hausdorff 空間の直積は Loeb 空間
$\Longrightarrow$ $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を整列可能集合の族で Λ が整列可能ならば $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ も整列可能．

証明． $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を非空整列可能集合の族とする．命題 8 と同じ記号を使うことにして，$A \subset X_\lambda$ を取ると $\pi_\lambda^{-1}(A) \in \mathcal{A}^0_Y$ である．よって $\mathcal{P}(X_\lambda) \setminus \{\emptyset\}$ の選択関数 f_λ が $f_\lambda(A) := \pi_\lambda(g(\pi_\lambda^{-1}(A)))$ により定まる．この選択関数 f_λ により X_λ の整列順序 $\leq_\lambda$ が

定義される．これにより $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の整列順序が定義できる．故に $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ は整列可能である． $\square$

系． 選択公理
$\iff$ Loeb Hausdorff 空間の直積は Loeb 空間，かつ任意の集合は整列可能集合の整列和で書ける． $\square$

命題 10． コンパクト Hausdorff 空間は Loeb 空間
$\iff$ 非空コンパクト Hausdorff 空間の直積は空でない．

証明． ($\Longrightarrow$) $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を非空コンパクト Hausdorff 空間の族とする．$X := \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を直和すれば，Alexandroff の一点コンパクト化 $\bar{X}$ はコンパクト Hausdorff である．仮定から $\bar{X}$ は Loeb 空間となり，故に定理 4 の証明と同様にして $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が選択関数を持つことが分かる．

($\Longleftarrow$) X をコンパクト Hausdorff 空間とすれば，$\mathcal{A}_X^0$ は非空コンパクト Hausdorff 空間の族である． $\square$

参考文献

[1] K. Keremedis and E. Tachtsis, On Loeb and weakly Loeb Hausdorff spaces, Scient. Math. Jap. 83 No 2, (2001) 3, 413–422, `http://www.samos.aegean.gr/math/kker/`

[2] K. Keremedis, Compact and Loeb Hausdorff spaces in ZF and the axiom of choice for families of finite sets, Math. Log. Quart. 58, No. 3 (2012), 130–138

[3] H. Herrlich and K. Keremedis and E. Tachtsis, Countable sums and products of Loeb and selective metric spaces, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, vol. 46 (2005), issue 2, 373–384, `http://dml.cz/dmlcz/119531`

[4] K. Keremedis K and E. Tachtsis, Weak axioms of choice for metric spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 133 (2005) 12, 3691–3701, `http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9939-05-07970-0`