Lindenbaum の定理と選択公理

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2016 年 5 月 29 日

定義. S を集合とする．写像 $\mathrm{Cn}\colon \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ が S 上の consequence operation とは以下の条件を満たすことを言う:

1. $X \in \mathcal{P}(S)$ に対して $X \subset \mathrm{Cn}(X)$ である．
2. $\mathrm{Cn} \circ \mathrm{Cn} = \mathrm{Cn}$ である．
3. $X, Y \in \mathcal{P}(S)$ について，$X \subset Y$ ならば $\mathrm{Cn}(X) \subset \mathrm{Cn}(Y)$ である．
4. $X \in \mathcal{P}(S)$ とする．任意の $x \in \mathrm{Cn}(X)$ に対してある有限部分集合 $Y \subset X$ が存在して $x \in \mathrm{Cn}(Y)$ となる．

集合 S と S 上の consequence operation Cn の組 $\langle S, \mathrm{Cn}\rangle$ を system と呼ぶ．

定義. $\langle S, \mathrm{Cn}\rangle$ を system で $X \in \mathcal{P}(S)$，$x \in S$ とする．

1. X が矛盾する $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Cn}(X) = S$．
2. X が無矛盾 $\Longleftrightarrow$ X が矛盾しない．
3. X が理論 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Cn}(X) = X$．
4. X が極大理論 $\Longleftrightarrow$ X が無矛盾な理論で，任意の $Y \supsetneq X$ が矛盾する．
5. X が x-飽和 $\Longleftrightarrow$ $x \notin \mathrm{Cn}(X)$ で，任意の $y \notin X$ に対して $x \in \mathrm{Cn}(X \cup \{y\})$．
6. Cn がコンパクト $\Longleftrightarrow$ 矛盾する任意の X に対して，矛盾する有限部分集合 $Y \subset X$ が存在する．

定理 1. 選択公理 $\Longleftrightarrow$ $\langle S, \mathrm{Cn}\rangle$ を system として $X \in \mathcal{P}(S)$，$x \in S$ とする．$x \notin \mathrm{Cn}(X)$ ならば x-飽和な理論 $Y \supset X$ が存在する．

証明. ($\Longrightarrow$) 選択公理により，ある極限順序数 λ を使って $S = \{x_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ と書ける．

$\alpha \leq \lambda$ に対して X_α を

$$X_\alpha := \begin{cases} X & (\alpha = 0 \text{ のとき}) \\ X_\beta \cup \{x_\beta\} & (\alpha = \beta + 1,\ x \notin \mathrm{Cn}(X_\beta \cup \{x_\beta\}) \text{ のとき}) \\ X_\beta & (\alpha = \beta + 1,\ x \in \mathrm{Cn}(X_\beta \cup \{x_\beta\}) \text{ のとき}) \\ \displaystyle\bigcup_{\beta < \alpha} X_\beta & (\alpha \text{が極限順序数のとき}) \end{cases}$$

で定義する．$Y := X_\lambda$ が x-飽和な理論であることを示せばよい．

まず Y が理論であることを示すため，$Y \subsetneq \mathrm{Cn}(Y)$ と仮定する．$x_\alpha \in \mathrm{Cn}(Y) \setminus Y$ となる $\alpha < \lambda$ が存在する．$x_\alpha \in \mathrm{Cn}(Y)$ だからある有限部分集合 $Z \subset Y$ が存在して $x_\alpha \in \mathrm{Cn}(Z)$ となる．$Z = \{x_{\beta_1}, \cdots, x_{\beta_n}\}$，$\beta_1 < \cdots < \beta_n$ と書く．このとき $\beta_n < \alpha$ である．

$\because$) $\alpha \leq \beta_n$ と仮定すると

$$X_\alpha \subset X_{\beta_n} \subset X_{\beta_n} \cup \{x_{\beta_n}\} \subset \mathrm{Cn}(X_{\beta_n} \cup \{x_{\beta_n}\})$$

となる．また $Z \subset X_{\beta_n} \cup \{x_{\beta_n}\}$ だから $x_\alpha \in \mathrm{Cn}(Z) \subset \mathrm{Cn}(X_{\beta_n} \cup \{x_{\beta_n}\})$ であるので，$X_\alpha \cup \{x_\alpha\} \subset \mathrm{Cn}(X_{\beta_n} \cup \{x_{\beta_n}\})$ が分かる．故に

$$x \in \mathrm{Cn}(X_\alpha \cup \{x_\alpha\}) \subset \mathrm{Cn}(\mathrm{Cn}(X_{\beta_n} \cup \{x_{\beta_n}\})) = \mathrm{Cn}(X_{\beta_n} \cup \{x_{\beta_n}\})$$

となるが，一方 $x_{\beta_n} \in Y = X_\lambda$ より $x \notin \mathrm{Cn}(X_{\beta_n} \cup \{x_{\beta_n}\})$ となり矛盾する．

よって $Z \subset X_\alpha$ が分かり $x_\alpha \in \mathrm{Cn}(Z) \subset \mathrm{Cn}(X_\alpha)$ である．従って $X_\alpha \cup \{x_\alpha\} \subset \mathrm{Cn}(X_\alpha)$ だから

$$x \in \mathrm{Cn}(X_\alpha \cup \{x_\alpha\}) \subset \mathrm{Cn}(\mathrm{Cn}(X_\alpha)) = \mathrm{Cn}(X_\alpha)$$

が分かる．よって有限部分集合 $W \subset X_\alpha$ が存在して $x \in \mathrm{Cn}(W)$ となる．$W = \{x_{\gamma_1}, \cdots, x_{\gamma_m}\}$, $\gamma_1 < \cdots < \gamma_m$ と書く．$W \subset X_\alpha$ だから $\gamma < \alpha$ である．また $x_{\gamma_m} \in X_\alpha$ となるので $x \notin \mathrm{Cn}(X_{\gamma_m} \cup \{x_{\gamma_m}\})$ でなければならない．しかし $W \subset X_{\gamma_m} \cup \{x_{\gamma_m}\}$ だから $x \in \mathrm{Cn}(W) \subset \mathrm{Cn}(X_{\gamma_m} \cup \{x_{\gamma_m}\})$ となり矛盾する．以上により Y が理論であることが分かった．

Y が x-飽和であることを示す．まず $x \notin \mathrm{Cn}(Y)$ を示すため $x \in \mathrm{Cn}(Y)$ と仮定する．ある有限部分集合 $Z \subset Y$ が存在して $x \in \mathrm{Cn}(Z)$ となる．$Z = \{x_{\beta_1}, \cdots, x_{\beta_n}\}$, $\beta_1 < \cdots < \beta_n$ と書く．$x_{\beta_n} \in Y$ となる為には $x \notin \mathrm{Cn}(X_{\beta_n} \cup \{x_{\beta_n}\})$ でなければならない．一方 $Z \subset X_{\beta_n} \cup \{x_{\beta_n}\}$ だから $x \in \mathrm{Cn}(Z) \subset \mathrm{Cn}(X_{\beta_n} \cup \{x_{\beta_n}\})$ となり矛盾する．故に $x \notin \mathrm{Cn}(Y)$ である．

後は任意の $y \notin Y$ に対して $x \in \mathrm{Cn}(Y \cup \{y\})$ を示せばよい．$y \notin Y$ とする．$y = x_\alpha$ と書けば，$x_\alpha \notin Y = X_\lambda$ だから $x \in \mathrm{Cn}(X_\alpha \cup \{x_\alpha\})$ である．$X_\alpha \cup \{x_\alpha\} \subset Y \cup \{x_\alpha\}$ より $x \in \mathrm{Cn}(X \cup \{x_\alpha\})$ となる．

($\Longleftarrow$) $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を互いに素な非空集合の族とする．$S := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ として $\mathrm{Cn}\colon \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ を，$X \in \mathcal{P}(S)$ に対して

$$\mathrm{Cn}(X) := \begin{cases} X & (\text{ある } \Sigma \subset \Lambda \text{ が存在して } X \text{ が } \{X_\lambda\}_{\lambda \in \Sigma} \text{ の選択集合となるとき}) \\ S & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

と定める．Cn は明らかに consequence operation である．

ある $\mu \in \lambda$ に対して $|X_\mu| > 1$ としてよい．$a \in X_\mu$ を一つ取る．$\mathrm{Cn}(\emptyset) = \emptyset$ だから $a \notin \mathrm{Cn}(\emptyset)$ となる．故に仮定により a-飽和な理論 $Y \supset \emptyset$ が存在する．Y が理論だから $\mathrm{Cn}(Y) = Y$ であり，a-飽和だから $\mathrm{Cn}(Y) \subsetneq S$ である．故にある $\Sigma \subset \Lambda$ が存在して Y は $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Sigma}$ の選択集合となる．

$\Sigma = \Lambda$ を示せばよい．その為に $\Sigma \subsetneq \Lambda$ と仮定すると $\lambda \in \Lambda \setminus \Sigma$ が取れる．$x \in X_\lambda$ を任意にとる (但し $\lambda = \mu$ の場合は $x \neq a$ としておく)．明らかに $Y \cup \{x\}$ は $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Sigma \cup \{\lambda\}}$ の選択集合である．$x \notin Y$ だから，Y が a-飽和であることより $a \in \mathrm{Cn}(Y \cup \{x\})$ かつ $a \notin \mathrm{Cn}(Y) = Y$ である．従って $a \notin Y \cup \{x\}$ だから $\mathrm{Cn}(Y \cup \{x\}) \neq Y \cup \{x\}$ が分かる．故に $Y \cup \{x\}$ が $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Sigma \cup \{\lambda\}}$ の選択集合であることに矛盾する． □

定理 2. 選択公理 $\Longleftrightarrow$ $\langle S, \mathrm{Cn} \rangle$ を system として Cn がコンパクトなとき，任意の無矛盾な理論 $X \in \mathcal{P}(S)$ に対して極大理論 $Y \supset X$ が存在する．

証明. ($\Longrightarrow$) 省略

($\Longleftarrow$) $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を互いに素な非空集合の族とする．$S := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ として $\mathrm{Cn}\colon \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ を，$X \in \mathcal{P}(S)$ に対して

$$\mathrm{Cn}(X) := \begin{cases} X & (\text{ある } \Sigma \subset \Lambda \text{ が存在して } X \text{ が } \{X_\lambda\}_{\lambda \in \Sigma} \text{ の選択集合となるとき}) \\ S & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

と定める．Cn は明らかに consequence operation である．

ある $\mu \in \lambda$ に対して $|X_\mu| > 1$ としてよい．すると Cn は明らかにコンパクトである．$\mathrm{Cn}(\emptyset) = \emptyset$ だから $\emptyset$ は無矛盾な理論であり，よって極大理論 $Y \supset \emptyset$ が存在する．Y が理論だから $\mathrm{Cn}(Y) = Y$ であり，無矛盾だから $\mathrm{Cn}(Y) \subsetneq S$ である．故にある $\Sigma \subset \Lambda$ が存在して Y は $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Sigma}$ の選択集合となる．

$\Sigma = \Lambda$ を示せばよい．その為に $\Sigma \subsetneq \Lambda$ と仮定すると $\lambda \in \Lambda \setminus \Sigma$ が取れる．$x \in X_\lambda$ を任意にとる．明らかに $Y \cup \{x\}$ は $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Sigma \cup \{\lambda\}}$ の選択集合である．$x \notin Y$ だから，Y が

極大理論であることより $\mathrm{Cn}(Y \cup \{x\}) = S$ となる．故に $Y \cup \{x\}$ が $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Sigma \cup \{\lambda\}}$ の選択集合であることに矛盾する． $\square$

参考文献

[1] D. Miller, Some Restricted Lindenbaum Theorems Equivalent to the Axiom of Choice, Logica Universalis, Volume 1 Issue 1 (2007), 183–199

[2] Dzik W., The Existence of Lindenbaum's Extensions is Equivalent to the Axiom of Choice, Reports on Mathematical Logic 12 (1981), 29–31