線型空間と選択公理 (その他)

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2014 年 9 月 6 日

定理. k を体とするとき，
選択公理
$\Longleftrightarrow$ 任意の k-線型空間 V とその部分空間 A に対し，A の補空間 B が存在する．
(即ち，$A \oplus B = V$ となる B．)

証明. ($\Longrightarrow$) $X := \{W \subset V \mid W$ は部分空間，$A \cap W = 0\}$ に Zorn の補題を適用すればよい．

($\Longleftarrow$) 選択公理と同値な AMC を示す．

> ※ AMC (= the Axiom of Multiple Choice) とは次の命題のこと．
>
> 非空集合の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$に対し，有限集合の族 $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$で
> 任意の$\lambda \in \Lambda$に対し$\emptyset \neq F_\lambda \subset X_\lambda$となるものが存在する．
>
> 同値性の証明は the Axiom of Multiple Choice を参照．

$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を互いに素な非空集合，$X := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ とする．集合 Y に対して $k^{(Y)}$ で Y を基底とする k-線型空間を表す．各 $\lambda \in \Lambda$ に対し

$$A_\lambda := \left\{ \sum_{x\in X_\lambda} a(x)x \in k^{(X_\lambda)} \;\middle|\; \sum_{x\in X_\lambda} a(x) = 0 \right\}$$

と定義する．$A := \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \subset \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} k^{(X_\lambda)} = k^{(X)}$ に仮定を適用すると $A \oplus B = k^{(X)}$ となる部分空間 $B \subset k^{(X)}$ が存在する．

$x \in X_\lambda$ を $x \in k^{(X)}$ とみなして $x = a(x) + b(x)$ $(a(x) \in A,\ b(x) \in B)$ と表す．任意

の $x,y\in X_\lambda$ をとる．$x-y\in A$ に注意すると

$$b(x)-b(y)=(x-a(x))-(y-a(y))=(x-y)-a(x)+a(y)\in A$$

となるから $b(x)-b(y)\in A\cap B=0$，即ち $b(x)=b(y)$ である．従って，$b_\lambda := b(x)$ は $x\in X_\lambda$ の取り方によらず λ のみから定まる．$b_\lambda\in B\subset k^{(X)}$ なので，$b_\lambda=\displaystyle\sum_{y\in X}\alpha_\lambda(y)y$ と一意に表せる．そこで $F_\lambda := \{y\in X_\lambda \mid \alpha_\lambda(y)\neq 0\}$ と置く．$\displaystyle\sum_{y\in X}\alpha_\lambda(y)y$ は実質有限和だから F_λ も有限集合である．また，$x\in X_\lambda$ に対し

$$x-\sum_{y\in X}\alpha_\lambda(y)y=x-b_\lambda=x-b(x)=a(x)\in A=\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$$

であるが，$x-\displaystyle\sum_{y\in X}\alpha_\lambda(y)y$ の A_λ 成分は明らかに $x-\displaystyle\sum_{y\in X_\lambda}\alpha_\lambda(y)y$ である．A_λ の定義より $1-\displaystyle\sum_{y\in X_\lambda}\alpha_\lambda(y)=0$，故に $\alpha_\lambda(y)\neq 0$ となる $y\in X_\lambda$ は存在する．即ち F_λ は空でない．以上により AMC が成立する． $\square$

定理． 次の命題は (ZF 上) 同値．

1. 選択公理
2. 0 でない線型空間の族 $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，空でない有限集合の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で各 X_λ は一次独立な部分集合 $X_\lambda\subset V_\lambda$ となるものが存在する．(Vector Space Multiple Choice)
3. 0 でない線型空間の族 $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，非空集合の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で各 X_λ は一次独立な部分集合 $X_\lambda\subset V_\lambda$ となるものが存在する．(Vector Space Kinna-Wagner Principle)

証明． 1$\Longrightarrow$2 と 2$\Longrightarrow$3 は明らか．

(3 $\Longrightarrow$ 1) AMC を示す．$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を互いに素な非空集合の族とする．$K_\lambda := \{f\in\mathbb{Q}(X_\lambda) \mid f$ は 0 次の斉次式 $\}\subset\mathbb{Q}(X_\lambda)$ は部分体である．$\mathbb{Q}(X_\lambda)$ を K_λ 上の線型空間と見なし，X_λ で生成される部分空間を $V_\lambda\subset\mathbb{Q}(X_\lambda)$ とする．$\dim V_\lambda=1$ である．

> $\because$) $x_0\in X_\lambda$ を一つ取る．このとき任意の $x\in X_\lambda$ は $x=\left(\dfrac{x}{x_0}\right)x_0$ と書ける．$\dfrac{x}{x_0}\in K_\lambda$ だから，V_λ は K_λ 上一つの元 x_0 で生成される．

仮定 3 を $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に適用して $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を得る．$Y_\lambda\subset V_\lambda$ は 0 でない一次独立な集

合で，$\dim V_\lambda = 1$ だったから $Y_\lambda = \{v_\lambda\}$ と書ける．このとき $F_\lambda := \{x \in X_\lambda \mid x$ は $v_\lambda \in \mathbb{Q}(X_\lambda)$ の表示に現れる $\}$ と置けばよい． □

※ AMC $\Longrightarrow$ 選択公理は基礎の公理を使っているから，この 3$\Longrightarrow$1 の証明も基礎の公理を使っていることになる．実は，この証明は基礎の公理無しで出来る．というのも，3 から AC($< \aleph_0$) (有限集合の族に対する選択公理) が証明できる為である．

それを示すため，$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を非空有限集合の族とする．$\mathbb{R}$ 上の有限次元線型空間 $\mathbb{R}^{X_\lambda}$ を考える．部分空間 $S_\lambda \subset \mathbb{R}^{X_\lambda}$ を $S_\lambda := \{f \in \mathbb{R}^{X_\lambda} \mid f$ は定数関数 $\}$ で定める．$V_\lambda := \mathbb{R}^{X_\lambda}/S_\lambda$ として，族 $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に仮定 3 を適用して $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を得る．Y_λ は有限集合である．$v_\lambda := \displaystyle\sum_{y\in Y_\lambda} y \in V_\lambda$ と置く．$v_\lambda = [f]$ となる $f \in \mathbb{R}^{X_\lambda}$ を取り，$F_\lambda := \{x \in X_\lambda \mid f$ は x で最小値を取る $\}$ と定める．これは f の取り方によらず well-defined である．

$\because$) $[f] = [g]$ とすれば，ある $r \in \mathbb{R}$ により $f(x) = g(x) + r$ と書ける．よって $f(x) < f(x') \Longleftrightarrow g(x) < g(x')$ である．

$Y_\lambda \subset V_\lambda$ は一次独立だったから，定義より $v_\lambda \neq 0$ である．故に V_λ の定義から，$v_\lambda = [f]$ となる $f \in \mathbb{R}^{X_\lambda}$ は定数関数ではないので，$F_\lambda \subsetneq X_\lambda$ である．

後は，the Axiom of Multiple Choice の定理 2 の証明と同様にすれば良い．

参考文献

[1] Horst Herrlich, Axiom of Choice，Springer, 2006

[2] K. Keremedis, The Vector Space Kinna-Wagner Principle is Equivalent to the Axiom of Choice, Math. Log. Quart. 47 (2001) 2, 205–210