

Lebesgue 非可測集合の存在

alg-d

<http://alg-d.com/math/ac/>

2011 年 11 月 14 日

命題 (Lebesgue 測度の性質). \mathbb{R} の Lebesgue 測度を μ で表すことにする .

- (1) E, F が可測集合で $E \subset F$ となるとき $\mu(E) \leq \mu(F)$
- (2) 互いに交わらない可測集合 E_1, E_2, \dots に対し $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$
- (3) 可測集合 E と実数 x に対し $E+x := \{y+x \mid y \in E\}$ と置くととき $\mu(E+x) = \mu(E)$
- (4) $\mu(\mathbb{R}) = \infty$

これらの性質と選択公理を使って, 非可測集合が存在することを示す .

定理. Lebesgue 非可測集合 ($\subset \mathbb{R}$) が存在する .

証明. \mathbb{R}/\mathbb{Q} を考える .

\mathbb{R} 上の同値関係 \sim を

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$$

で定義する . この時 $\mathbb{R}/\mathbb{Q} := \mathbb{R}/\sim$ である .

\mathbb{R}/\mathbb{Q} の元は \mathbb{R} の部分集合である . 同値類の性質より, これらの元は互いに交わらない . よって選択公理により各元 $A \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ から 1 つずつ実数 $x(A)$ を選べる . この時, $A \cap [0, 1] \neq \emptyset$ だから, $x(A) \in [0, 1]$ となるように選ぶことができる .

正確に言えば, 集合 $X := \{[0, 1] \cap A \mid A \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}\}$ に選択公理を適用するということ .

$V := \{x(A) \mid A \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}\}$ とおく . $x(A)$ の選び方により $V \subset [0, 1]$.

V が Lebesgue 可測だと仮定する . 正整数 k に対し $V_k := V + \frac{1}{k}$ と置く . Lebesgue 測度の性質により $\mu(V) = \mu(V_k)$. また, $k \neq l$ ならば $V_k \cap V_l = \emptyset$ である .

$\therefore x \in V_k \cap V_l$ とするとある実数 $y, z \in V$ が有って $x = y + \frac{1}{k} = z + \frac{1}{l}$. よって $y - z \in \mathbb{Q}$ だから V の定義より $y = z$, よって $\frac{1}{k} = \frac{1}{l}$ である . 即ち $k = l$.

また , 明らかに $V_k \subset [0, 2]$ である . 故に正整数 n に対し

$$n\mu(V) = \sum_{k=1}^n \mu(V_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^n V_k\right) \leq \mu([0, 2]) = 2.$$

n はいくらでも大きく取れるから $\mu(V) = 0$ でなければならない .

さて , V の定義より $\mathbb{R} = \bigsqcup_{q \in \mathbb{Q}} (V + q)$ と書けるが , \mathbb{Q} は可算集合だから

$$\infty = \mu(\mathbb{R}) = \mu\left(\bigsqcup_{q \in \mathbb{Q}} (V + q)\right) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} \mu(V + q) = \sum 0 = 0$$

となり矛盾する . 故に V は Lebesgue 非可測である . □

参考文献

[1] 田中 尚夫 , 『選択公理と数学【増訂版】』 , 遊星社 , 2005 年