束と選択公理

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2015 年 12 月 5 日

定義. $(L, \leq)$ を空でない順序集合とする．任意の元 $x, y \in L$ に対し，集合 $\{x, y\} \subset L$ が上限 (=最小上界) と下限 (=最大下界) を持つとき，$(L, \leq)$ を束 (lattice) という．$x \vee y := \sup\{x, y\}$, $x \wedge y := \inf\{x, y\}$ と書く．

1. 最大元 1 と最小元 0 を持つ束を有界束 (bounded lattice) という．
2. 分配律 $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ を満たす束を分配束 (distributive lattice) という．(このとき，分配律 $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ も成り立つ．)
3. 任意の部分集合が上限と下限を持つ束 L を完備束 (complete lattice) という．$A \subset L$ に対し $\sup A = \bigvee A = \bigvee_{a \in A} a$ などと表す．下限も同様.

   ※ 部分集合として空集合を考えれば $0 = \bigvee \emptyset \in L$, $1 = \bigwedge \emptyset \in L$ である．即ち完備束は有界束.
4. 空でない集合 X に対し，冪集合 $\mathcal{P}(X)$ は $\subset$ によって束になる．ある X に対する $(\mathcal{P}(X), \subset)$ と同型な束を powerset lattice という．
5. 空でない位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ に対し，$\mathcal{O}_X$ と $\mathcal{A}_X :=$ (X の空でない閉集合全体) は包含関係 $\subset$ によって束になる．ある X に対する $(\mathcal{O}_X, \subset)$ と同型な束を open lattice，$(\mathcal{A}_X, \subset)$ と同型な束を closed lattice という．

定義. $(L, \leq)$ を順序集合とする．

1. 空でない部分集合 $F \subsetneq L$ が次の二条件を満たすとき，F をフィルター (filter) という．
   (a) 任意の $x, y \in F$ に対しある $z \in F$ が存在して $z \leq x$ かつ $z \leq y$ となる．
   (b) $x \in F$ かつ $x \leq y$ ならば $y \in F$

2. フィルター $F \subsetneq L$ を含むフィルターが F 自身しかないとき，F を極大フィルター (maximal filter) という．
3. L を束とする．フィルター $F \subsetneq L$ が

$$x \vee y \in F \Longrightarrow x \in F \text{ または } y \in F$$

を満たすとき，F を素フィルター (prime filter) という．

定理. 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 選択公理
2. 2 元以上持つ有界束は極大フィルターを持つ.
3. 2 元以上持つ完備束は極大フィルターを持つ.
4. 2 元以上持つ分配有界束は極大フィルターを持つ.
5. 任意の closed lattice は極大フィルターを持つ.

証明. ($1 \Longrightarrow 2$) Zorn の補題による.

$(L, \leq)$ を 2 元以上持つ有界束として集合 $X := \{F \subset L \mid F \text{ はフィルター}\}$ を考える．$\subset$ で X に順序を入れる．$C \subset X$ を部分全順序集合とする．$C = \emptyset$ のときは $\{1\} \subsetneq L$ が C の上界である．$C \neq \emptyset$ のとき，$F := \displaystyle\bigcup_{G \in C} G$ とすれば F はフィルターである.

$\because$) フィルターの定義 (1a)(1b) を確かめる.

(1a) $x, y \in F$ を取る．$x \in G_1$, $y \in G_2$ となる $G_1, G_2 \in C$ が存在する．$(C, \subset)$ は全順序だから $G_1 \subset G_2$ または $G_2 \subset G_1$ である．$G_1 \subset G_2$ としても一般性を失わない．このとき $x, y \in G_2$ となる．G_2 はフィルターだから $z \leq x$, $z \leq y$ となる $z \in G_2 \subset F$ が存在する.

(1b) $x \in F, y \in L$ を取る．$x \in G$ となる $G \in C$ が存在する．G はフィルターだから $y \in G \subset F$ となる.

故に C は上界 F を持つ．故に Zorn の補題より X は極大元を持つ．それが極大フィルターである.

($2 \Longrightarrow 3$) と ($2 \Longrightarrow 4$) は明らか.

($3 \Longrightarrow 5$) と ($4 \Longrightarrow 5$) は，closed lattice が完備分配束で，2 元以上持つから明らか.

($5 \Longrightarrow 1$) $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を非空集合の族とする．どの X_λ にも含まれない元 ∞ を考え，$Y_\lambda := X_\lambda \cup \{\infty\}$ とする．$\mathcal{A}_\lambda := \{Y_\lambda\} \cup \{A \subset X_\lambda \mid A \text{ は有限集合}\}$ を Y_λ の閉集合全体として Y_λ に位相を定める．直積位相空間 $Y := \prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$ を考える．$(\infty)_{\lambda \in \Lambda} \in Y$ だか

ら，Y は空ではない．よって仮定 5 より closed lattice $\mathcal{A}_Y$ は極大フィルター $\mathcal{F}$ を持つ．$\pi_\lambda : Y \longrightarrow Y_\lambda$ を射影として $\mathcal{F}_\lambda := \{A \in \mathcal{A}_\lambda \mid \pi_\lambda^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$ と定める．各 $\mathcal{F}_\lambda$ は素フィルターである．

> $\because$) $A \cup B \in \mathcal{F}_\lambda$ とする．$\mathcal{F} \ni \pi_\lambda^{-1}(A \cup B) = \pi_\lambda^{-1}(A) \cup \pi_\lambda^{-1}(B)$ であるから $\mathcal{F}$ の極大性により $\pi_\lambda^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ または $\pi_\lambda^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ である．故に $A \in \mathcal{F}_\lambda$ または $B \in \mathcal{F}_\lambda$.

$\Lambda_1 := \{\lambda \in \Lambda \mid \mathcal{F}_\lambda = \{Y_\lambda\}\}$，$\Lambda_2 := \Lambda \setminus \Lambda_1$ とする．$\lambda \in \Lambda_2$ とすると，$A \in \mathcal{A}_\lambda$ となる有限集合 $A \subset X_\lambda$ がある．故に素フィルターの性質から $\{x_\lambda\} \in \mathcal{F}_\lambda$ となる $x_\lambda \in X_\lambda$ が唯一つ存在することが分かる．よって $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_2} \in \prod_{\lambda \in \Lambda_2} X_\lambda$ が取れる．つまり，$\Lambda_2 = \Lambda$ (即ち $\Lambda_1 = \emptyset$) を示せば証明が終わる．$y = (y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in Y$ を

$$y_\lambda := \begin{cases} x_\lambda & (\lambda \in \Lambda_2) \\ \infty & (\lambda \in \Lambda_1) \end{cases}$$

で定義する．$\lambda \in \Lambda$ として，$U \subset Y_\lambda$ を y_λ の開近傍とする．$\pi_\lambda^{-1}(U)$ は $\mathcal{F}$ の全ての元と交わる．

任意の $B \in \mathcal{F}$ を取る．すると y の任意の近傍は B と交わる．$\mathcal{F}$ は $\mathcal{A}_Y$ のフィルターだから，$B \in \mathcal{F}$ は閉集合．従って $y \in B$ となる．B は任意だったから $y \in \bigcap \mathcal{F} := \bigcap_{B \in \mathcal{F}} B$ である．$\bigcap \mathcal{F}$ は閉集合だから，$\overline{\{y\}} \subset \bigcap \mathcal{F}$ となる ($\overline{}$ は閉包)．また $\overline{\{y\}} = \overline{\prod_{\lambda \in \Lambda} \{y_\lambda\}} \subset \prod_{\lambda \in \Lambda} \overline{\{y_\lambda\}}$ である．

$$Z_\lambda := \begin{cases} \{x_\lambda\} & (\lambda \in \Lambda_2) \\ Y_\lambda & (\lambda \in \Lambda_1) \end{cases}$$

と置けば $\overline{\{y_\lambda\}} = Z_\lambda$ だから $\overline{\{y\}} = \prod_{\lambda \in \Lambda} Z_\lambda$ となる．

$\Lambda_1 \neq \emptyset$ と仮定する．$\mu \in \Lambda_1$ と $z_\mu \in X_\mu$ を取り，閉集合 $\{z_\mu\} \times \prod_{\lambda \neq \mu} Z_\lambda \subset Y$ で生成される $\mathcal{A}_Y$ のフィルターを考える．これは明らかに $\mathcal{F}$ より真に大きいので，極大性に矛盾する．故に $\Lambda_1 = \emptyset$ である． □

定義． 完備束 L が completely distributive
$\Longleftrightarrow$ 任意の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ と任意の写像 $x : \bigcup_{\lambda \in \Lambda}(\{\lambda\} \times X_\lambda) \longrightarrow L$ に対し

$$\bigwedge_{\lambda \in \Lambda} \bigvee_{a \in X_\lambda} x(\lambda, a) = \bigvee_{(a_\lambda) \in X} \bigwedge_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda, a_\lambda)$$

が成立する (ただし，$X := \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ と置いた).

定理． 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 選択公理

2. 全順序な完備束は completely distributive.
3. powerset lattice は completely distributive.
4. 完備束 $\mathbf{2} := \{0,1\}$ は completely distributive.

証明. ($1 \implies 2$) L を全順序な完備束として，集合族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ と写像 $x\colon \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(\{\lambda\}\times X_\lambda) \longrightarrow L$ を取る．$X := \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ と置く．

まず $\geq$ を示す．任意の $(a_\lambda) \in X$ を取る．各 $\lambda\in\Lambda$ について $\displaystyle\bigvee_{a\in X_\lambda} x(\lambda,a) \geq x(\lambda,a_\lambda)$. 故に

$$\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}\bigvee_{a\in X_\lambda} x(\lambda,a) \geq \bigwedge_{\lambda\in\Lambda} x(\lambda,a_\lambda)$$

$(a_\lambda)\in X$ は任意だったから

$$\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}\bigvee_{a\in X_\lambda} x(\lambda,a) \geq \bigvee_{(a_\lambda)\in X}\bigwedge_{\lambda\in\Lambda} x(\lambda,a_\lambda)$$

が示された．次に $\leq$ を示す．

$$y := \bigwedge_{\lambda\in\Lambda}\bigvee_{a\in X_\lambda} x(\lambda,a)$$

と置く．$\lambda\in\Lambda$ とすると $\bigvee_{a\in X_\lambda} x(\lambda,a) \not< y$ となる．よって L は全順序だから $\bigvee_{a\in X_\lambda} x(\lambda,a) \geq y$ である．故にある $a\in X_\lambda$ が存在して $x(\lambda,a)\not< y$ となる．L は全順序だから $x(\lambda,a)\geq y$ である．即ち，$A_\lambda := \{a\in X_\lambda \mid x(\lambda,a)\geq y\}$ とすると任意の $\lambda\in\Lambda$ に対して $A_\lambda \neq \emptyset$ となる．選択公理により $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq\emptyset$，即ち元 $(b_\lambda)\in\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ が存在する．A_λ の定義から，各 $\lambda\in\Lambda$ に対し $x(\lambda,b_\lambda)\geq y$ となる．このとき

$$y \leq \bigwedge_{\lambda\in\Lambda} x(\lambda,b_\lambda) \leq \bigvee_{(a_\lambda)\in X}\bigwedge_{\lambda\in\Lambda} x(\lambda,a_\lambda)$$

だから y の定義により

$$\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}\bigvee_{a\in X_\lambda} x(\lambda,a) \leq \bigvee_{(a_\lambda)\in X}\bigwedge_{\lambda\in\Lambda} x(\lambda,a_\lambda)$$

が示された．

($1 \implies 3$) 選択公理から「$\bigcap, \bigcup$ の分配律」が従うことから分かる．

※ これは実は同値である．∪∩の分配法則 を参照.

($2 \implies 4$) $\mathbf{2}$ が全順序であることから明らか.

($3 \implies 4$) は $\mathbf{2} = \{0,1\} = \{\emptyset,\{\emptyset\}\} = \mathcal{P}(\{\emptyset\})$ から明らか.

$(4 \Longrightarrow 1)$ $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を非空集合の族とする．$X := \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ と置く．$x\colon \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(\{\lambda\}\times X_\lambda) \longrightarrow \mathbf{2}$ を $x(\lambda, a) := 1$ で定めれば

$$1 = \bigwedge_{\lambda\in\Lambda} \bigvee_{a\in X_\lambda} 1 = \bigvee_{(a_\lambda)\in X} \bigwedge_{\lambda\in\Lambda} 1 = \bigvee_{(a_\lambda)\in X} 1$$

$\displaystyle\bigvee_{a\in\emptyset} x_a = 0$ だから，最右辺が 1 になる為には $X \neq \emptyset$ でなければならない． $\square$

参考文献

[1] Horst Herrlich, Axiom of Choice，Springer, 2006