Krull の定理 $\Longrightarrow$ 選択公理の別証明

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2012 年 10 月 20 日

X を集合，k を体とする．X の元を不定元とする多項式環 $k[X]$ の「係数 1 の単項式全体がなす集合」を M と置く．任意の $f \in k[X]$ に対して，ある $q_0, \cdots, q_n \in k^\times$ と相異なる $m_0, \cdots, m_n \in M$ が一意に存在して $f = q_0m_0 + \cdots + q_nm_n$ と書ける．このとき $M_f := \{m_0, \cdots, m_n\}$ と書く．また，部分集合 $A \subset k[X]$ が生成する $k[X]$ のイデアルを $\bar{A}$ で表すことにする．$\bar{A} = \{f_0m_0 + \cdots + f_nm_n \mid n \geq 0,\ f_i \in k[X],\ m_i \in A\}$ である．

定義. 部分集合 $A \subset k[X]$ が conservative $\Longleftrightarrow \displaystyle\bigcup_{f \in A} M_f \subset A$.

命題 1. イデアル $\mathfrak{a} \subset k[X]$ が conservative
$\Longleftrightarrow$ ある部分集合 $N \subset M$ が存在して $\mathfrak{a} = \bar{N}$ と書ける．

証明. ($\Longrightarrow$) $N := \displaystyle\bigcup_{f \in \mathfrak{a}} M_f$ と置く．$\mathfrak{a}$ が conservative だから $N \subset \mathfrak{a}$，従って $\bar{N} \subset \mathfrak{a}$ である．一方，$f \in \mathfrak{a}$ とすれば $M_f \subset N$ だから $f \in \bar{M_f} \subset \bar{N}$ となる．

($\Longleftarrow$) $f \in \bar{N}$ のとき $M_f \subset \bar{N}$ であるから明らか． □

$k[X]$ の conservative なイデアル全体のなす集合を c-I$(k[X])$ で表すことにする．c-I$(k[X])$ は包含関係 $\subset$ により順序集合である．以下，この pdf では「順序」と書いたら常に $\subset$ による順序を表す．$\sigma\colon \mathcal{P}(M) \longrightarrow$ c-I$(k[X])$ を $\sigma(N) := \bar{N}$ で定める．これは順序を保つ写像である (即ち $N_0 \subset N_1 \Longrightarrow \sigma(N_0) \subset \sigma(N_1)$ となる)．命題 1 によれば σ は全射である．

$k[X]$ の conservative な素イデアル全体を c-Spec$(k[X])$ で表すことにする．$X \subset M$ であるから $\mathcal{P}(X) \subset \mathcal{P}(M)$ である．よって制限写像 $\sigma|_{\mathcal{P}(X)}$ を考えることが出来る．

命題 2. 1. $\sigma|_{\mathcal{P}(X)}$ は単射である．

2. $\mathrm{Im}\,(\sigma|_{\mathcal{P}(X)}) = \text{c-Spec}(k[X])$.
3. $\sigma|_{\mathcal{P}(X)}\colon \mathcal{P}(X) \longrightarrow \text{c-Spec}(k[X])$ は順序同型である．

証明. (1) 明らか.

(2) $Y \subset X$ に対して $\sigma(Y) = \bar{Y}$ は素イデアルである．よって $\mathrm{Im}\,(\sigma|_{\mathcal{P}(X)}) \subset \text{c-Spec}(k[X])$ である．$\mathfrak{p} \in \text{c-Spec}(k[X])$ とする．$\sigma(X \cap \mathfrak{p}) \subset \sigma(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$ は明らかである．逆に，任意の $f \in \mathfrak{p}$ に対して $f \in \sigma(X \cap \mathfrak{p})$ である．

$\because$) $\mathfrak{p}$ が conservative だから $M_f \subset \mathfrak{p}$ である．

任意の $m \in M_f$ を取る．ある $x_0, \cdots, x_n \in X$ が存在して $m = x_0 \cdots x_n$ と書ける．$m \in M_f \subset \mathfrak{p}$ で，$\mathfrak{p}$ は素イデアルだからある $0 \leq i \leq n$ に対して $x_i \in \mathfrak{p}$ である．よって $x_i \in X \cap \mathfrak{p}$ だから，$m = \dfrac{m}{x_i} x_i \in \sigma(X \cap \mathfrak{p})$ である．$m \in M_f$ は任意だったから，$f \in \sigma(X \cap \mathfrak{p})$ となる．

よって $\sigma(X \cap \mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$ である．以上より $\mathrm{Im}\,(\sigma|_{\mathcal{P}(X)}) = \text{c-Spec}(k[X])$.

(3) 2 の証明から分かるように，$\sigma|_{\mathcal{P}(X)}$ の逆写像は $\mathfrak{p} \longmapsto X \cap \mathfrak{p}$ である．故に $Y, Z \in \mathcal{P}(X)$ に対して「$Y \subset Z \Longleftrightarrow \sigma|_{\mathcal{P}(X)}(Y) \subset \sigma|_{\mathcal{P}(X)}(Z)$」となる． □

定義. X を集合とする．

1. $F \subset \mathcal{P}(X)$ が有限性を持つ
   $\Longleftrightarrow$「$Y \in F \Longleftrightarrow$ 任意の有限部分集合 $Z \subset Y$ に対して $Z \in F$」
2. $\mathrm{Fin}(X) := \{F \subset \mathcal{P}(X) \mid F$ は有限性を持つ $\}$
3. $F \in \mathrm{Fin}(X)$ に対して $A(F) := \displaystyle\bigcup_{Y \in F} \bar{Y}$
4. 部分集合 $A \subset k[X]$ に対して $\text{c-Spec}_{\subset A}(k[X]) := \{\mathfrak{p} \in \text{c-Spec}(k[X]) \mid \mathfrak{p} \subset A\}$

$F \in \mathrm{Fin}(X)$ とすると，$F \subset \mathcal{P}(X)$ であるから $\sigma|_F = \sigma|_{\mathcal{P}(X)}|_F$ を考えることが出来る．

補題 3. $\mathrm{Im}\,(\sigma|_F) = \text{c-Spec}_{\subset A(F)}(k[X])$

証明. 簡単のため，この証明の中だけ「$(k[X])$」を略す．命題 2 で示したように，$\sigma|_{\mathcal{P}(X)}\colon \mathcal{P}(X) \longrightarrow \text{c-Spec}$ は順序同型であった．よって $\mathcal{P}(X) \cap \sigma^{-1}(\text{c-Spec}_{\subset A(F)}) = F$ を示せば良い．$I_{\subset A(F)} = I_{\subset A(F)}(k[X]) := \{\mathfrak{a} \subset k[X] \mid \mathfrak{a}$ はイデアル，$\mathfrak{a} \subset A(F)\}$ と置けば

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}(X)\cap\sigma^{-1}(\text{c-Spec}_{\subset A(F)}) &= \mathcal{P}(X)\cap\sigma^{-1}(\text{c-Spec}\cap I_{\subset A(F)})\\
&= \mathcal{P}(X)\cap\sigma^{-1}(\text{c-Spec})\cap\sigma^{-1}(I_{\subset A(F)})\\
&= \mathcal{P}(X)\cap\{N\subset M \mid \sigma(N)=\bar{N}\subset A(F)\}\\
&= \{Y\subset X \mid \bar{Y}\subset A(F)\}
\end{aligned}
$$

である．故に $\{Y\subset X \mid \bar{Y}\subset A(F)\}=F$ を示せば良い．

$A(F)=\bigcup_{Y\in F}\bar{Y}$ だから $\supset$ は明らか．

$Y\subset X$ が $\bar{Y}\subset A(F)$ を満たすとする．任意の有限部分集合 $Z\subset Y$ に対して $Z\in F$ である．

$\because$) $Z\subset Y$ で Z が有限だから $\sum_{z\in Z} z\in\bar{Y}\subset A(F)=\bigcup_{W\in F}\bar{W}$ である．即ちある $W\in F$ が存在して $\sum_{z\in Z} z\in\bar{W}$ となる．このとき明らかに $Z\subset W$ でなければならない．Z は有限集合だったから，F の有限性により $Z\in F$ である．

Z は任意だったから，再び F の有限性により $Y\in F$ である．故に $\{Y\subset X \mid \bar{Y}\subset A(F)\}\subset F$ が分かった． □

補題 4. $F\subset\mathcal{P}(X)$ は有限性を持つとする．$\mathfrak{a}\in \mathrm{I}_{\subset A(F)}(k[X])$ と $f\in\mathfrak{a}$ と $m\in M_f$ に対して $\overline{\{m\}}+\mathfrak{a}\in\mathrm{I}_{\subset A(F)}(k[X])$ である．

証明. 任意の $g\in\mathfrak{a}$ を取る．自然数 e を，どの $n\in M_g$ も m^e で割り切れないように取る．$h:=m^e f+g\in\mathfrak{a}$ とすれば，$\mathfrak{a}\subset A(F)$ だからある $Y\in F$ が存在して $h\in\bar{Y}$ である．e の取り方から $m^{e+1}\in M_h$ かつ $M_g\subset M_h$ が分かる．補題 3 により $\bar{Y}$ は conservative だから $m^{e+1}\in\bar{Y}$ かつ $M_g\subset\bar{Y}$ である．$\bar{Y}$ は素イデアルだから $m\in\bar{Y}$ となる．故に，任意の $a\in k[X]$ に対して $am+g\subset\bar{Y}\subset A(F)$ である．即ち $\overline{\{m\}}+\mathfrak{a}\subset A(F)$． □

補題 5. $F\subset\mathcal{P}(X)$ は有限性を持つとする．$\mathfrak{a}\in\mathrm{I}_{\subset A(F)}(k[X])$ とする．このとき $\text{c-I}_{\supset\mathfrak{a}}(k[X]):=\{\mathfrak{b}\in\text{c-I}(k[X]) \mid \mathfrak{b}\supset\mathfrak{a}\}$ は最小元 $\mathfrak{c}$ を持ち，$\mathfrak{c}\subset A(F)$ を満たす．

証明. $N:=\bigcup_{f\in\mathfrak{a}}M_f$ として $\mathfrak{c}:=\bar{N}$ と置く．明らかに $\mathfrak{c}=\min(\text{c-I}_{\supset\mathfrak{a}}(k[X]))$ である．よって $\mathfrak{c}\subset A(F)$ を示せば良い．その為に任意の $g\in\mathfrak{c}$ を取る．$\mathfrak{c}$ の定義から，ある $m_0,\cdots,m_n\in N$ と $\alpha_0,\cdots,\alpha_n\in k^\times$ が存在して $g=\alpha_0m_0+\cdots+\alpha_nm_n$ と書ける．N の定義から，ある $f_0,\cdots,f_n\in\mathfrak{a}$ が存在して $m_i\in M_{f_i}$ となる．よって補題 4 を使えば，

$0 \leq i \leq n$ に対して帰納的に $\overline{\{m_i\}} + (\overline{\{m_{i-1}\}} + \cdots + \overline{\{m_0\}} + \mathfrak{a}) \subset A(F)$ であることが分かる．従って $g \in A(F)$ である． $\square$

命題 6. $F \subset \mathcal{P}(X)$ は有限性を持つとする．このとき $\mathrm{Spec}_{\subset A(F)}(k[X])$ の極大元は conservative イデアルである．

証明. $\mathfrak{a} \in \mathrm{Spec}_{\subset A(F)}(k[X])$ を極大元とする．勿論 $\mathfrak{a} \in \mathrm{I}_{\subset A(F)}(k[X])$ であるから，補題 5 により $\mathfrak{c} := \min \text{c-}\mathrm{I}_{\supset \mathfrak{a}}(k[X])$ は存在し，$\mathfrak{c} \subset A(F)$ である．$\mathfrak{c}$ は素イデアルである．

$\because$) $fg \in \mathfrak{c}$ とする．$\mathfrak{c} \subset A(F) = \bigcup_{Y \in F} \bar{Y}$ だから，ある $Y \in F$ が存在して $fg \in \bar{Y}$ である．$\bar{Y}$ は素イデアルだから，$f \in \bar{Y}$ または $g \in \bar{Y}$ となる．今，$\mathfrak{c}$ は conservative だから $\bar{Y} \subset \mathfrak{c}$ である．故に $f \in \mathfrak{c}$ または $g \in \mathfrak{c}$ となる．即ち，$\mathfrak{c}$ は素イデアルである．

よって $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{c} \in \mathrm{Spec}_{\subset A(F)}(k[X])$ であるが，$\mathfrak{a}$ の極大性により $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$ となる．よって $\mathfrak{a}$ は conservative である． $\square$

順序集合 A の極大元全体がなす集合を $\mathfrak{m}(A)$ で表すことにする．

命題 7. X を任意の集合，k を任意の体，$F \in \mathrm{Fin}(X)$ とする．このとき全単射 $\mathfrak{m}(F) \longrightarrow \mathfrak{m}(\text{c-}\mathrm{Spec}_{\subset A(F)}(k[X]))$ が存在する．

証明. 補題 3 により，$\sigma|_F \colon F \longrightarrow \text{c-}\mathrm{Spec}_{\subset A(F)}(k[X])$ は全単射である．σ は順序同型だったから，$\sigma|_F$ も順序同型であり，よって $\sigma|_{\mathfrak{m}(F)} \colon \mathfrak{m}(F) \longrightarrow \mathfrak{m}(\text{c-}\mathrm{Spec}_{\subset A(F)}(k[X]))$ は全単射である． $\square$

$F \in \mathrm{Fin}(X)$ とする．$A(F) = \bigcup_{Y \in F} \bar{Y}$ は素イデアルの和集合であるから，$S := k[X] \setminus A(F)$ は積閉集合である．故に局所化 $k[X]_{A(F)} = S^{-1}k[X]$ を考えることが出来る．良く知られているように，自然な写像 $k[X] \longrightarrow k[X]_{A(F)}$ によって順序同型 $\rho \colon \mathrm{Spec}(k[X]_{A(F)}) \longrightarrow \mathrm{Spec}_{\subset A(F)}(k[X])$ が得られる．

命題 8. ρ は全単射 $\mathfrak{m}(\mathrm{Spec}(k[X]_{A(F)})) \longrightarrow \mathfrak{m}(\text{c-}\mathrm{Spec}_{\subset A(F)}(k[X]))$ を与える．

証明. $\mathfrak{a} \in \mathfrak{m}(\mathrm{Spec}(k[X]_{A(F)}))$ とする．ρ は順序同型だから，$\rho(\mathfrak{a})$ は $\mathrm{Spec}_{\subset A(F)}(k[X])$ の極大元である．故に命題 6 により $\rho(\mathfrak{a}) \in \text{c-}\mathrm{Spec}_{\subset A(F)}(k[X])$ となる．このとき明らかに $\rho(\mathfrak{a}) \in \mathfrak{m}(\text{c-}\mathrm{Spec}_{\subset A(F)}(k[X]))$ である． $\square$

定理. X を任意の集合，k を任意の体，$F \in \mathrm{Fin}(X)$ とするとき，次の条件は同値．

1. F は極大元を持つ.
2. $k[X]_{A(F)}$ は極大イデアルを持つ.

証明. 命題 7 と命題 8 により明らか. □

定理. Krull の定理 $\Longrightarrow$ 選択公理

証明. Tukey の補題「有限性を持つ集合は極大元をもつ」は選択公理と同値である (詳しくは Zorn の補題・極大原理を参照). 故に前定理から明らか. □

参考文献

[1] Marcel Erné, A primrose path from Krull to Zorn, Comment. Math. Univ. Carolin. 36, 1 (1995) 123–126, `http://dml.cz/dmlcz/118738`