入射的・射影的と選択公理

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2016 年 1 月 23 日

定義. C を圏とする.

1. 対象 $I \in C$ が入射的 (injective)
   $\iff$ 関手 $\mathrm{Hom}_C(-, I)$ がモノ射をエピ射に送る
2. 対象 $P \in C$ が射影的 (projective)
   $\iff$ 関手 $\mathrm{Hom}_C(P, -)$ がエピ射をエピ射に送る (エピ射を保つ)
3. C が十分豊富に入射的対象を持つ (enough injective)
   $\iff$ 任意の対象 $X \in C$ に対し，ある入射的対象 $I \in C$ とモノ射 $f\colon X \longrightarrow I$ が存在する．これを $\mathrm{EI}(C)$ で表す.
4. C が十分豊富に射影的対象を持つ (enough projective)
   $\iff$ 任意の対象 $X \in C$ に対し，ある射影的対象 $P \in C$ とエピ射 $f\colon P \longrightarrow X$ が存在する．これを $\mathrm{EP}(C)$ で表す.

例. 集合と写像のなす圏 **Set** の場合.

集合 X が入射的
$\iff$ 任意の単射 $f\colon Y \longrightarrow Z$ と任意の写像 $g\colon Y \longrightarrow X$ に対しある写像 $h\colon Z \longrightarrow X$ が存在して $g = h \circ f$ となる.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[dl, dashed, "h"] \\ X & \end{tikzcd}$$

集合 X が射影的
$\iff$ 任意の全射 $f\colon Y \longrightarrow Z$ と任意の写像 $g\colon X \longrightarrow Z$ に対しある写像 $h\colon X \longrightarrow Y$ が

存在して $g = f \circ h$ となる．

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, two heads, "f"] & Z \\ & X \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, dashed, "h"] \end{tikzcd}$$

$\square$

命題 1. EI(**Set**) である．

証明. 任意の空でない集合が入射的だからである． $\square$

定理 2. 次の命題は (ZF 上) 同値．

1. 選択公理
2. 任意の集合は射影的である．
3. 任意の集合 X に対して，射影的な集合 Y が存在して $X \subset Y$ となる．

証明. $(1 \Longrightarrow 2)$ X を任意の集合とする．任意の全射 $f\colon Y \longrightarrow Z$ と任意の写像 $g\colon X \longrightarrow Z$ を取る．

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, two heads, "f"] & Z \\ & X \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, dashed, "h"] \end{tikzcd}$$

f が全射だから各 $x \in X$ に対し $f^{-1}(g(x))$ は空でない．そこで $\{f^{-1}(g(x))\}_{x \in X}$ に選択公理を適用して選択関数 $h\colon X \longrightarrow \bigcup_{x \in X} f^{-1}(g(x)) \subset Y$ を得る．すると，$h(x) \in f^{-1}(g(x))$ だから $f \circ h = g$ である．

$(2 \Longrightarrow 3)$ $Y = X$ とすればよいから明らか．

$(3 \Longrightarrow 1)$ 全射の右逆写像の存在を示す．$f\colon X \longrightarrow Y$ を全射とする．仮定 3 により，射影的な集合 Z で $Y \subset Z$ となるものが存在する．$a \in Y$ を一つ取る．写像 $g\colon Z \longrightarrow Y$ を

$$g(z) := \begin{cases} z & (z \in Y \text{ のとき}) \\ a & (z \notin Y \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定める．

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, two heads, "f"] & Y \arrow[d, shift right, "i"'] \\
& Z \arrow[u, shift right, "g"'] \arrow[ul, dashed, "h"]
\end{tikzcd}
$$

$i\colon Y \longrightarrow Z$ を包含写像とすれば明らかに $g \circ i = \mathrm{id}_Y$ である．Z が射影的だから，ある写像 $h\colon Z \longrightarrow X$ が存在して $f \circ h = g$ を満たす．このとき $k := h \circ i\colon Y \longrightarrow X$ と置けば $f \circ k = f \circ h \circ i = g \circ i = \mathrm{id}_Y$ である． □

例． R を単位的可換環とし，R-加群と R-準同型のなす圏 R-**Mod** を考える．

R-加群 M が入射的

$\Longleftrightarrow$ 任意の単射準同型 $f\colon L \longrightarrow N$ と任意の準同型 $g\colon L \longrightarrow M$ に対し，ある準同型 $h\colon N \longrightarrow M$ が存在して $g = h \circ f$ となる．

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[dl, dashed, "h"] \\
& M &
\end{tikzcd}
$$

R-加群 M が射影的

$\Longleftrightarrow$ 任意の全射準同型 $f\colon N \longrightarrow L$ と任意の準同型 $g\colon M \longrightarrow L$ に対し，ある準同型 $h\colon M \longrightarrow N$ が存在して $g = f \circ h$ となる．

$$
\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "f"] & L \arrow[r] & 0 \\
& M \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, dashed, "h"] &
\end{tikzcd}
$$

□

※ R-加群の完全列 $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ に対し

$$
\begin{gathered}
0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(B, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A, M) \\
0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, C)
\end{gathered}
$$

は完全列．よって

M が入射的 $\Longleftrightarrow$ 関手 $\mathrm{Hom}_R(-, M)$ が完全 ($\Longleftrightarrow$ 完全列を完全列に送る)

M が射影的 $\Longleftrightarrow$ 関手 $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ が完全

アーベル群と群準同型のなす圏 $\mathbf{Ab}$ を考える．($\mathbf{Ab} = \mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}$ である．) よく知られているように，$\mathrm{EI}(\mathbf{Ab})$ と $\mathrm{EP}(\mathbf{Ab})$ が成立している．$\mathrm{EP}(\mathbf{Ab})$ のよく知られた証明は

1. 任意のアーベル群 A に対し，自由アーベル群 B と全射準同型 $f\colon B \longrightarrow A$ が存在する．
2. 自由アーベル群は射影的である．

という手順で与えられる．$\mathrm{EI}(\mathbf{Ab})$ の証明も同じように

1. 任意のアーベル群 A に対し，可除アーベル群 B と単射準同型 $f\colon A \longrightarrow B$ が存在する．
2. 可除アーベル群は入射的である．

という手順で与えられる．

※ R-加群 M が可除 $\Longleftrightarrow$ 任意の $x \in M$ が可除元． $x \in M$ が可除元 $\Longleftrightarrow$ 任意の非零因子 $r \in R$ に対してある $y \in M$ が存在して $x = ry$ となる．

どちらの証明も 1 は選択公理を使わずに (ZF で) できる．問題は 2 である．

定理 3. 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 選択公理
2. 任意の単位的可換環 R と R-加群 M に対して次が成り立つ.

   任意のイデアル $I \subset R$ と任意の準同型 $\varphi\colon I \longrightarrow M$ に対して
   ある準同型 $\psi\colon R \longrightarrow M$ が存在して $\psi|_I = \varphi$ となる．
   $\Longrightarrow M$ が入射的
3. 任意の単項イデアル整域 R に対して，可除 R-加群は入射的.
4. 可除アーベル群は入射的.

証明. ($1 \Longrightarrow 2$) 単射準同型 $f\colon L \longrightarrow N$ と準同型 $g\colon L \longrightarrow M$ を取る．f により $L \subset N$ とみなす．集合

$$X := \{(A, h) \mid L \subset A \subset N \text{ は部分加群},\ h\colon A \longrightarrow M,\ h|_L = g\}$$

を考える．X に順序 $\leq$ を

$$(A, h) \leq (B, k) \Longleftrightarrow A \subset B,\ k|_A = h$$

で定めると $(X, \leq)$ は帰納的順序集合となり，Zorn の補題より極大元 $(A, h) \in X$ が存在する．

$A \subsetneq N$ と仮定する．元 $x \in N \setminus A$ が取れる．$B := A + Rx$ と置く．$I := \{r \in R \mid rx \in A\} \subset R$ はイデアルである．準同型 $\varphi\colon I \longrightarrow M$ を $\varphi(r) := h(rx)$ で定める．仮定から $\psi\colon R \longrightarrow M$ が存在して $\psi|_I = \varphi$ である．さて，準同型 $k\colon B \longrightarrow M$ を任意の $a \in A$ と $r \in R$ に対して $k(a + rx) := h(a) + r\psi(1)$ と定める．これは well-defined である．

$\because$) $a_0 + r_0 x = a_1 + r_1 x$ $(a_0, a_1 \in A,\ r_1, r_2 \in R)$ とすると $(r_0 - r_1)x = a_1 - a_0 \in A$ だから

$$h(a_1 - a_0) = h((r_0 - r_1)x) = \varphi(r_0 - r_1) = \psi(r_0 - r_1) = (r_0 - r_1)\psi(1).$$

故に $h(a_0) + r_0\psi(1) = h(a_1) + r_1\psi(1)$ である．

このとき $k|_A = h$ だから $(A, h) \leq (B, k)$ である．明らかに $A \subsetneq B$ だから (A, h) の極大性に矛盾する．故に $A = N$ が分かり，$g = h \circ f$ である．

※ 逆「M が入射的 $\Longrightarrow \psi|_I = \varphi$ なる $\psi\colon R \longrightarrow M$ が存在する」は選択公理によらず成り立つ．それは次の図式から明らか．

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & N \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

$(2 \Longrightarrow 3)$ R を単項イデアル整域，M を可除 R-加群とする．任意のイデアル $I \subset R$ と任意の $\varphi\colon I \longrightarrow M$ を取る．仮定 2 により $\psi|_I = \varphi$ となる準同型 $\psi\colon R \longrightarrow M$ を見つければよい．$I = 0$ のときは自明だから $I \neq 0$ とする．R が単項イデアル整域だから，ある $\alpha(\neq 0) \in R$ を使って $I = (\alpha)$ と書ける．$\varphi(\alpha) \in M$ なので M の可除性により，ある $m \in M$ が存在して $\varphi(\alpha) = \alpha m$ となる．そこで $\psi\colon R \longrightarrow M$ を $\psi(r) := rm$ で定めれば $\psi(\alpha) = \alpha m = \varphi(\alpha)$ だから $\psi|_I = \varphi$ である．

$(3 \Longrightarrow 4)$ $\mathbb{Z}$ は単項イデアル整域である．

$(4 \Longrightarrow 1)$ 選択公理と同値な次の命題を示す．

集合族 $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が「任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $|X_\lambda| \geq 2$」を満たすとき，
有限集合の族 $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在して任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $\emptyset \neq F_\lambda \subsetneq X_\lambda$ となる．

※同値性の証明は the Axiom of Multiple Choice の定理 2 を参照.

集合族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が「任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $|X_\lambda| \geq 2$」を満たすとする．これらは互いに素としてよい．$X := \displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ と置く．X を基底とする $\mathbb{Q}$ 上の線形空間を V とする．以下これを可除アーベル群として考える．$H := \langle x - y \mid$ ある $\lambda \in \Lambda$ が存在して $x, y \in X_\lambda\rangle \subset V$ は部分群で，$D := V/H$ も可除アーベル群になる．$v \in V$ の属する同値類を $\overline{v} \in D$ で表す．任意の $x, y \in X_\lambda$ に対し $\overline{x} = \overline{y}$ である．よって $\overline{x} \in D$ は $x \in X_\lambda$ の取り方によらず，λ のみから定まる．そこで $\widehat{\lambda} := \overline{x}$ と定める．Λ で生成される自由アーベル群を F とする．

$$m_\lambda := \begin{cases} |X_\lambda| & (\ |X_\lambda| < \infty \text{ のとき}) \\ 2 & (\ |X_\lambda| = \infty \text{ のとき}) \end{cases}$$

として，$f(\lambda) := m_\lambda\lambda$ と $g(\lambda) := \widehat{\lambda}$ により，単射準同型 $f\colon F \longrightarrow F$ と準同型 $g\colon F \longrightarrow D$ が得られる．

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & F \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & F \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

仮定 4 より可除アーベル群 D は入射的，よって準同型 $h\colon F \longrightarrow D$ で $h \circ f = g$ を満たすものが存在する．$\lambda \in \Lambda$ に対して

$$\widehat{\lambda} = g(\lambda) = h(f(\lambda)) = h(m_\lambda\lambda) = m_\lambda h(\lambda).$$

$h(\lambda) \in D = V/H$ だから，ある $v_\lambda \in V$ を使って $h(\lambda) = \overline{v_\lambda}$ と書ける．$v_\lambda = \displaystyle\sum_{x\in X} \alpha_x^{(v_\lambda)} x$ ($\alpha_x^{(v_\lambda)} \in \mathbb{Q}$ は有限個を除いて 0) と一意的に書けて，このとき

$$\widehat{\lambda} = m_\lambda h(\lambda) = m_\lambda\overline{v_\lambda} = \overline{m_\lambda v_\lambda} = \overline{\sum_{x\in X} m_\lambda\alpha_x^{(v_\lambda)} x}.$$

任意の $y \in X_\lambda$ を一つ取れば取れば $\widehat{\lambda} = \overline{y}$ だったから $\overline{y} = \overline{\displaystyle\sum_{x\in X} m_\lambda\alpha_x^{(v_\lambda)} x}$ である．故に $(m_\lambda\alpha_y^{(v_\lambda)} - 1)y + \displaystyle\sum_{x\neq y} m_\lambda\alpha_x^{(v_\lambda)} x \in H$ だから，任意の $x \in X_\lambda$ に対して $m_\lambda\alpha_x^{(v_\lambda)} \in \mathbb{Z}$ となる．よってある $n_x \in \mathbb{Z}$ が存在して $\alpha_x^{(v_\lambda)} = \dfrac{n_x}{m_\lambda}$ と書ける．このとき

$$\overline{\sum_{x\in X_\lambda} m_\lambda\alpha_x^{(v_\lambda)} x} = \overline{\sum_{x\in X_\lambda} n_x x} = \sum_{x\in X_\lambda} n_x\overline{x} = \sum_{x\in X_\lambda} n_x\widehat{\lambda}$$

だから $\displaystyle\sum_{x \in X_\lambda} n_x = 1$ である．従って $\alpha_x^{(v_\lambda)} \in \dfrac{1}{m_\lambda}\mathbb{Z}$ かつ $\displaystyle\sum_{x \in X_\lambda} \alpha_x^{(v_\lambda)} = \dfrac{1}{m_\lambda}$ が分かった．そこで

$$
\begin{aligned}
n_\lambda &:= \min\left\{ n > 0 \;\middle|\; \text{ある } x \in X_\lambda \text{に対して} \alpha_x^{(v_\lambda)} \equiv \frac{n}{m_\lambda} \pmod 1 \right\} \\
F_\lambda &:= \left\{ x \in X_\lambda \;\middle|\; \alpha_x^{(v_\lambda)} \equiv \frac{n_\lambda}{m_\lambda} \pmod 1 \right\}
\end{aligned}
$$

とすれば (これらは v_λ の取り方によらない)，$F_\lambda \subset X_\lambda$，$0 < |F_\lambda| < \infty$ である．

あとは $F_\lambda \subsetneq X_\lambda$ を示せばよい．これは $|X_\lambda| = \infty$ のときは明らかだから $|X_\lambda| < \infty$ としてよい．$F_\lambda = X_\lambda$ と仮定する．即ち任意の $x \in X_\lambda$ に対し $\alpha_x^{(v_\lambda)} \equiv \dfrac{n_\lambda}{m_\lambda} \pmod 1$ である．このとき $\dfrac{1}{m_\lambda} = \displaystyle\sum_{x \in X_\lambda} \alpha_x^{(v_\lambda)} \equiv \dfrac{n_\lambda}{m_\lambda} m_\lambda \equiv 0 \pmod 1$ となり $m_\lambda > 1$ に矛盾する． □

定理 4. 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 選択公理
2. R を環，$\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を R-加群の族とする．全ての $\lambda \in \Lambda$ について M_λ が射影的ならば，$M := \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ も射影的である．
3. 任意の環 R に対して，任意の自由 R-加群は射影的.
4. 任意の自由アーベル群は射影的.
5. ある環 R が存在して，任意の自由 R-加群は射影的.

証明. ($1 \Longrightarrow 2$) 任意の全射準同型 $f\colon N \longrightarrow L$ と準同型 $g\colon M \longrightarrow L$ を取る．$\lambda \in \Lambda$ に対し $i_\lambda\colon M_\lambda \longrightarrow M$ を標準的な埋め込みとして，$A_\lambda := \{h_\lambda\colon M_\lambda \longrightarrow N \mid f \circ h_\lambda = g \circ i_\lambda\}$ と置く．

$$
\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "f"] & L \arrow[r] & 0 \\
 & M \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, dashed, "h"'] & \\
 & M_\lambda \arrow[u, "i_\lambda"'] \arrow[uul, dashed, "h_\lambda"] &
\end{tikzcd}
$$

M_λ は射影的だから $A_\lambda \neq \emptyset$ である．よって選択公理により $(h_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \displaystyle\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ が取れる．すると直和の普遍性から $h\colon M \longrightarrow N$ で $h \circ i_\lambda = h_\lambda$ となるようなものが存在する．このとき $f \circ h \circ i_\lambda = f \circ h_\lambda = g \circ i_\lambda$ だから $f \circ h = g$ である．

※ 逆「M が射影的 $\Longrightarrow$ 各 M_λ が射影的」は選択公理によらず成り立つ．

($2 \Longrightarrow 3$) R 自身を R-加群とみるとき，R は射影的．よって自由 R-加群 $\bigoplus R$ は射影的である．

$3 \Longrightarrow 4$ と $4 \Longrightarrow 5$ は明らか．

($5 \Longrightarrow 1$) 選択公理と同値な AMC を示す．

※ AMC (= the Axiom of Multiple Choice) とは次の命題のこと．

$$\begin{aligned}&\text{非空集合の族 } \{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \text{に対し，有限集合の族 } \{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \text{で}\\ &\text{任意の} \lambda \in \Lambda \text{に対し} \emptyset \neq F_\lambda \subset X_\lambda \text{となるものが存在する．}\end{aligned}$$

同値性の証明は the Axiom of Multiple Choice を参照．

$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を互いに素な非空集合の族とする．$X := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ と置く．Λ で生成される自由 R-加群を M とし，X で生成される自由 R-加群を N とする．X_λ の元を λ に写す全射 $X \longrightarrow \Lambda$ から自然に全射準同型 $f\colon N \longrightarrow M$ が得られる．

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "f"] & M \arrow[r] & 0 \\ & M \arrow[ul, dashed, "h"] \arrow[u, "\mathrm{id}_M"'] & \end{tikzcd}$$

仮定より自由 R-加群 M は射影的，よってある $h\colon M \longrightarrow G$ が存在して $f \circ h = \mathrm{id}_M$ となる．$\lambda \in \Lambda \subset M$ に対し $h(\lambda) = \displaystyle\sum_{x\in X} \alpha_{\lambda,x} x$ ($\alpha_{\lambda,x} \in R$ は有限個を除いて 0) と書く．$\lambda = f \circ h(\lambda) = \displaystyle\sum_{\mu\in\Lambda}\Big(\sum_{x\in X_\mu} \alpha_{\lambda,x}\Big)\mu$ であり，表現の一意性から $\displaystyle\sum_{x\in X_\lambda} \alpha_{\lambda,x} = 1$ となる．故に $F_\lambda := \{x \in X_\lambda \mid \alpha_{\lambda,x} \neq 0\} \subset X_\lambda$ は空でない有限集合である．$\square$

※ 「AMC $\Longrightarrow$ 選択公理」には基礎の公理が使われているので，$5 \Longrightarrow 1$ の証明も基礎の公理を使っていることになる．$4 \Longrightarrow 1$ は基礎の公理を使わずに証明できる．

証明． 選択公理と同値な次の命題を示す．

$$\begin{aligned}&\text{集合族 } \{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \text{が「任意の} \lambda \in \Lambda \text{に対し } |X_\lambda| \geq 2 \text{」を満たすとき，}\\ &\text{有限集合の族 } \{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \text{が存在して任意の} \lambda \in \Lambda \text{に対して} \emptyset \neq F_\lambda \subsetneq X_\lambda \text{となる．}\end{aligned}$$

※同値性の証明は the Axiom of Multiple Choice の定理 2 を参照.

$5 \Longrightarrow 1$ の証明と同様にして $\alpha_{\lambda,x} \in \mathbb{Z}$ を定めて $F_\lambda := \{x \in X_\lambda \mid \alpha_{\lambda,x} > 0\}$ と定める．勿論 $\emptyset \neq F_\lambda \subset X_\lambda$ である．今 $\displaystyle\sum_{x \in X_\lambda} \alpha_{\lambda,x} = 1$ で $|X_\lambda| \geq 2$ だから $F_\lambda = X_\lambda$ はありえない．故に $\emptyset \neq F_\lambda \subsetneq X_\lambda$ となる □

定理 5. k を体とするとき，次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 選択公理
2. k-線型空間は入射的.
3. k-線型空間は射影的.
4. 基底を持つ k-線型空間は射影的.

証明. ($1 \Longrightarrow 2$) 体は単項イデアル整域で，線型空間は可除だから定理 3 の条件 3 より明らか.

($2 \Longrightarrow 1$) 選択公理と同値な「任意の k-線型空間 V とその部分空間 A に対し，A の補空間 B が存在する」を示す.

※ 同値性の証明については線型空間 (その他) を参照.

V を k-線型空間とし $A \subset V$ を部分空間とする．仮定 (2) より A は入射的である．故に，次の図式を可換にする線型写像 $f\colon V \longrightarrow A$ を得る.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] & V \arrow[dl, dashed, "f"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

$B := \ker f$ とすれば $A \oplus B = V$ である.

($1 \Longrightarrow 3$) V を k-線型空間 V とする．選択公理により V の基底が存在し，V は自由 k-加群である．故に定理 4 の条件 3 により V は射影的である.

($3 \Longrightarrow 4$) 明らか.

($4 \Longrightarrow 1$) AMC を示す．$\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を互いに素な非空集合の族とする．$X := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ と置く．$f\colon X \longrightarrow \Lambda$ を $f(x) := (x \in X_\lambda$ となる $\lambda)$ で定める．集合 B に対して $k^{(B)}$ で B を基底とする k-線型空間を表すと，f から線型写像 $\overline{f}\colon k^{(X)} \longrightarrow k^{(\Lambda)}$ が自然に得られる．f が全射だから，$\overline{f}$ も全射である．仮定 (4) より，$k^{(\Lambda)}$ は射影的，よって次の図式を

可換にする線型写像 $g\colon k^{(\Lambda)} \longrightarrow k^{(X)}$ が存在する．

$$
\begin{tikzcd}
k^{(X)} \arrow[r, "\overline{f}"] & k^{(\Lambda)} \arrow[r] & 0 \\
 & k^{(\Lambda)} \arrow[u, "\mathrm{id}"'] \arrow[ul, dashed, "g"] &
\end{tikzcd}
$$

$\lambda \in \Lambda$ に対し $g(\lambda) = \displaystyle\sum_{x \in X} a(x, \lambda)x$ と一意に表す．この表示を使って

$$F_\lambda := \{x \in X_\lambda \mid a(x, \lambda) \neq 0\}$$

と置く．$\displaystyle\sum_{x \in X} a(x, \lambda)x$ は有限和だから F_λ も有限集合である．また

$$
\begin{aligned}
\lambda = \mathrm{id}_{k^{(\Lambda)}}(\lambda) = \overline{f}(g(\lambda)) = \overline{f}\Bigl(\sum_{x \in X} a(x, \lambda)x\Bigr) = \sum_{x \in X} a(x, \lambda)\overline{f}(x) \\
= \sum_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda \lambda \quad \Bigl(b_\lambda := \sum_{x \in X_\lambda} a(x, \lambda)\Bigr)
\end{aligned}
$$

となるから，表現の一意性より $a(x, \lambda) \neq 0$ となる $x \in X_\lambda$ は存在する．即ち $F_\lambda \neq \emptyset$．故に AMC が成り立つ． □

ではEI(**Ab**) や EP(**Ab**) そのものは ZF で証明できるのであろうか，というと以下のことが知られている．

定理 6. 非自明な入射的アーベル群の存在は ZF で証明できない．よって EI(**Ab**) は ZF で証明できない． □

また，EP(**Ab**) からは制限された選択公理の一つである DMC(Dependent Multiple Choice) が従うことが知られている．ここから EP(**Ab**) が ZF で証明できないことが分かる．

※ 以下の命題を DMC という．
X を非空集合，R を X 上の二項関係で「任意の $x \in X$ に対してある $y \in Y$ が存在して xRy」を満たすとする．$x_0 \in X$ を取る．このときある列 $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ が存在して $F_0 = \{x_0\}$，$F_n \subset X$，$0 < |F_n| < \infty$ と「任意の $n \in \mathbb{N}$ と $x \in F_n$ に対して，ある $y \in F_{n+1}$ が存在して xRy」を満たす．

定理 7. $\mathrm{EP}(\mathbf{Ab}) \Longrightarrow \mathrm{DMC}$

証明. DMC と同値な次の命題を示す.

$\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ を互いに素な非空集合の族で，$|X_0| = 1$ とする．$X := \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ として，全射 $f\colon X \longrightarrow X$ は「$x \in X_{n+1}$ に対して $f(x) \in X_n$」を満たすとする．このときある $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ が存在して $F_n \subset X_n$，$0 < |F_n| < \infty$，$f(F_{n+1}) = F_n$ となる．

これを示すため，G を X で生成される自由アーベル群とする．$X_0 = \{x_0\}$ と書く．EP($\mathbf{Ab}$) により射影的アーベル群 P と全射準同型 $f\colon P \longrightarrow G$ が存在する．$g\colon G \longrightarrow G$ を

$$g(x) := \begin{cases} 0 & (x \in X_0) \\ f(x) & (x \in X \setminus X_0) \end{cases}$$

により定まる準同型とする．g は全射である．よって $g \circ f$ も全射である．

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f"] & G \arrow[r, "g"] & G \\ & & P \arrow[u, "f"'] \arrow[ull, dashed, "h"] \end{tikzcd}$$

P が射影的だから，ある $h\colon P \longrightarrow P$ が存在して $f = g \circ f \circ h$ となる．f は全射だから $f(p) = x_0$ となる $p \in P$ が存在する．

$$E_n := \{x \in X_n \mid x \text{ が } f \circ h^n(p) \in G \text{ の表示に現れる}\}$$

として $F_0 := E_0, F_{n+1} := E_{n+1} \cap f^{-1}(F_n)$ と定める．もちろん $F_n \subset X_n$, $0 < |F_n| < \infty$ である．よって $f(F_{n+1}) = F_n$ を示せばよい．$f(F_{n+1}) \subset F_n$ は定義から明らか．$x \in F_n$ とする．$E_{n+1} = \{y_0, \dots, y_s\}$ と置けば $f \circ h^{n+1}(p) = m_0 y_0 + \cdots + m_s y_s$ と書ける．よって $f \circ h^n(p) = g \circ f \circ h \circ h^n(p) = g(f \circ h^{n+1}(p)) = m_0 g(y_0) + \cdots + m_s g(y_s)$ である．$x \in E_n$ だから，ある番号 i について $x = g(y_i) = f(y_i)$ となる．故に $y_i \in E_{n+1} \cap f^{-1}(F_n) = F_{n+1}$ であり，$x \in f(F_{n+1})$ となる． $\square$

系. EP($\mathbf{Ab}$) $\Longrightarrow$ Urysohn の補題

証明. DMC $\Longrightarrow$ Urysohn だからである．Urysohn の補題を参照． $\square$

参考文献

[1] Andreas Blass , Injectivity, projectivity, and the axiom of choice, Trans. Amer. Math. Soc. 255 (1979), 31-59.

http://www.ams.org/journals/tran/1979-255-00/S0002-9947-1979-0542870-6/home.html

[2] Horst Herrlich, Axiom of Choice，Springer, 2006