

Hahn-Banach の定理と選択公理

alg-d

<http://alg-d.com/math/ac/>

2013 年 10 月 27 日

解析学において、選択公理が欠かせない定理として有名なのが Hahn-Banach の定理である。

定義. 関数 f, g と集合 S に対して

$$f =_S g \iff S \subset \text{dom}(f), \text{dom}(g) \text{ かつ } x \in S \text{ に対して } f(x) = g(x)$$

$$f \leq_S g \iff S \subset \text{dom}(f), \text{dom}(g) \text{ かつ } x \in S \text{ に対して } f(x) \leq g(x)$$

Hahn-Banach の定理. V を実線型空間, $W \subset V$ を部分空間として, $p: V \rightarrow \mathbb{R}$ を劣線型汎関数とする. $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ を線型汎関数とし, $f \leq_W p$ を満たすとする. このとき $Z(p, f) := \{g: V \rightarrow \mathbb{R} \mid g =_W f, g \leq_V p\} \neq \emptyset$ である.

証明は Zorn によるが, 実は選択公理より真に弱い超フィルター定理 (集合 X 上の任意のフィルターは超フィルターに拡張できる) があれば証明できることが知られている. この証明は, 超積を使えば次のように簡単にできる.

定理 1. 超フィルター定理 \implies Hahn-Banach の定理

証明. $A := \{g: V \rightarrow \mathbb{R}: \text{部分線型汎関数} \mid W \subset \text{dom}(g), g =_W f, g \leq_{\text{dom}(g)} p\}$ とする. 任意の $x \in V$ に対して $A_x := \{g \in A \mid x \in \text{dom}(g)\} \neq \emptyset$ である. また有限個の $x_0, \dots, x_n \in V$ に対して $A_{x_0} \cap \dots \cap A_{x_n} \neq \emptyset$ が成り立つ. 故に超フィルター定理により, $\{A_x \mid x \in X\} \subset \mathcal{P}(A)$ を含む A 上の超フィルター \mathcal{U} が存在する. ${}^*\mathbb{R} := \mathbb{R}^A / \mathcal{U}$ とする. $\varphi: V \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ を $x \in V$ に対して $\varphi(x) := [\{g(x)\}_{g \in A}]$ で定める. φ は明らかに線型で, 次の二条件を満たす: (i) $\varphi =_W f$ (ii) $\varphi \leq_V p$. (ii) より $x \in V$ に対して $\varphi(x)$ は有限である. よって $\psi(x) := \text{st}(\varphi(x)) \in Z(p, f)$ が定義できる. \square

[1] によれば「一般の Banach 空間 B において B^* が十分豊富に元を持つ事は Hahn-

Banach の定理によって保証されている」のであるが，ではもし Hahn-Banach が成り立たなければ B^* が豊富に元を持たないような Banach 空間 B が存在するのであるのか．実は以下のことが知られている．

実 Banach 空間 $\ell^\infty := \{\{x_n\}_{n=0}^\infty \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$ と閉部分空間 $c_0 = \{\{x_n\} \in \ell^\infty \mid \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$ から商 Banach 空間 ℓ^∞/c_0 が得られる．このとき

命題. $(\ell^\infty/c_0)^* \neq 0 \implies$ Baire の性質を持たない部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ が存在する．

実は次の定理が成り立つ．[2]

定理 2. ZF が無矛盾ならば ZF+「任意の $A \subset \mathbb{R}$ が Baire の性質を持つ」も無矛盾である．

故に，ZF で $(\ell^\infty/c_0)^* \neq 0$ を証明することはできないのである．

参考文献

- [1] 黒田 成俊，関数解析，共立出版，1980
- [2] H. Judah and S. Shelah, BAIRE PROPERTY AND AXIOM OF CHOICE, Israel J. Math. 84 (1993), 435–450
- [3] E. Schechter, Handbook of Analysis and its Foundations, Academic Press, 1997