Hahn-Banach の定理と選択公理

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2013 年 10 月 27 日

解析学において，選択公理が欠かせない定理として有名なのが Hahn-Banach の定理である．

定義. 関数 f, g と集合 S に対して
$f =_S g \iff S \subset \mathrm{dom}(f),\ \mathrm{dom}(g)$ かつ $x \in S$ に対して $f(x) = g(x)$
$f \leq_S g \iff S \subset \mathrm{dom}(f),\ \mathrm{dom}(g)$ かつ $x \in S$ に対して $f(x) \leq g(x)$

Hahn-Banach の定理. V を実線型空間，$W \subset V$ を部分空間として，$p\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$ を劣線型汎関数とする．$f\colon W \longrightarrow \mathbb{R}$ を線型汎関数とし，$f \leq_W p$ を満たすとする．このとき $Z(p, f) := \{g\colon V \longrightarrow \mathbb{R} \mid g =_W f,\ g \leq_V p\} \neq \emptyset$ である．

証明は Zorn によるが，実は選択公理より真に弱い超フィルター定理 (集合 X 上の任意のフィルターは超フィルターに拡張できる) があれば証明できることが知られている．この証明は，超積を使えば次のように簡単にできる．

定理 1. 超フィルター定理 $\Longrightarrow$ Hahn-Banach の定理

証明. $A := \{g\colon V \longrightarrow \mathbb{R}\colon$ 部分線型汎関数 $\mid W \subset \mathrm{dom}(g),\ g =_W f,\ g \leq_{\mathrm{dom}(g)} p\}$ とする．任意の $x \in V$ に対して $A_x := \{g \in A \mid x \in \mathrm{dom}(g)\} \neq \emptyset$ である．また有限個の $x_0, \ldots, x_n \in V$ に対して $A_{x_0} \cap \cdots \cap A_{x_n} \neq \emptyset$ が成り立つ．故に超フィルター定理により，$\{A_x \mid x \in X\} \subset \mathcal{P}(A)$ を含む A 上の超フィルター $\mathcal{U}$ が存在する．${}^*\mathbb{R} := \mathbb{R}^A/\mathcal{U}$ とする．$\varphi\colon V \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ を $x \in V$ に対して $\varphi(x) := [\{g(x)\}_{g \in A}]$ で定める．φ は明らかに線型で，次の二条件を満たす: (i) $\varphi =_W f$ (ii) $\varphi \leq_V p$．(ii) より $x \in V$ に対して $\varphi(x)$ は有限である．よって $\psi(x) := \mathrm{st}(\varphi(x)) \in Z(p, f)$ が定義できる． $\square$

[1] によれば「一般の Banach 空間 B において B^* が十分豊富に元を持つ事は Hahn-

Banach の定理によって保証されている」のであるが，ではもし Hahn-Banach が成り立たなければ B^* が豊富に元を持たないような Banach 空間 B が存在するのであろうか．実は以下のことが知られている．

実 Banach 空間 $\ell^\infty := \left\{\{x_n\}_{n=0}^\infty \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \;\middle|\; \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n| < \infty\right\}$ と閉部分空間 $c_0 = \left\{\{x_n\} \in \ell^\infty \;\middle|\; \lim_{n\to\infty} x_n = 0\right\} \subset \ell^\infty$ から商 Banach 空間 ℓ^∞/c_0 が得られる．このとき

命題. $(\ell^\infty/c_0)^* \neq 0 \Longrightarrow$ Baire の性質を持たない部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ が存在する．

実は次の定理が成り立つ．[2]

定理 2. ZF が無矛盾ならば ZF+「任意の $A \subset \mathbb{R}$ が Baire の性質を持つ」も無矛盾である．

故に，ZF で $(\ell^\infty/c_0)^* \neq 0$ を証明することはできないのである．

参考文献

[1] 黒田 成俊，関数解析，共立出版，1980

[2] H. Judah and S. Shelah, BAIRE PROPERTY AND AXIOM OF CHOICE, Israel J. Math. 84 (1993), 435–450

[3] E. Schechter, Handbook of Analysis and its Foundations, Academic Press, 1997