グラフの彩色と選択公理

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2016 年 2 月 28 日

濃度については順序数・濃度の簡単なまとめも参照.

定義. V が集合, E が V 上の二項関係で非反射的かつ反対称的なとき, 組 $G = (V, E)$ をグラフという.

定義. $G = (V, E)$ をグラフとする.

1. $S \subset V$ が従属 (dependent) $\iff$ ある $x, y \in S$ が存在して xEy となる.
2. $S \subset V$ が独立 (independent) $\iff$ S が従属でない.
3. 写像 $f\colon V \longrightarrow C$ が「任意の $c \in C$ に対して $f^{-1}(c) \subset V$ が独立である」を満たすとき, f を彩色 (coloring) と呼ぶ.
4. 彩色 $f\colon V \longrightarrow C$ が存在するとき, G は $|C|$-彩色可能であるという.
5. $\chi(G) := \min\{\lambda \mid G$ は λ-彩色可能である $\}$ が存在するとき, $\chi(G)$ を G の彩色数 (chromatic number) という.
6. 彩色 $f\colon V \longrightarrow C$ が既約 (irreducible) $\iff$ 任意の $c, d \in C$, $c \neq d$ に対して $f^{-1}(c) \cup f^{-1}(d)$ が従属となる.

定義. 集合 X, Y に対してグラフ $G(X, Y) = (X \times Y, E_0)$ と $\overline{G}(X, Y) = (X \times Y, E_1)$ を次により定める.

$$\langle x, y\rangle E_0 \langle x', y'\rangle \iff (x = x', y \neq y') \text{ または } (x \neq x', y = y')$$
$$\langle x, y\rangle E_1 \langle x', y'\rangle \iff x \neq x' \text{かつ } y \neq y'$$

定理 1. 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 選択公理
2. 任意のグラフの彩色数が存在する.

3. 任意の集合 X に対して，グラフ $\overline{G}(X, \Gamma(X))$ の彩色数が存在する．

証明. ($1 \Longrightarrow 2$) 彩色は任意のグラフに対して存在するから，選択公理により最小元 $\chi(G) = \min\{\lambda \mid G \text{ は } \lambda\text{-彩色可能である}\}$ も存在する．

($2 \Longrightarrow 3$) 明らか．

($3 \Longrightarrow 1$) グラフ $G := \overline{G}(X, \Gamma(X))$ は $|X|$-彩色可能かつ $|\Gamma(X)|$-彩色可能である．故に $\chi(G) \leq |X|$ かつ $\chi(G) \leq |\Gamma(X)|$ となる．$\chi(G) = |\Gamma(X)|$ と仮定すると $|\Gamma(X)| = \chi(G) \leq |X|$ となり矛盾するから，$\chi(G) < |\Gamma(X)|$ である．

$|C| = \chi(G)$ となる集合 C と彩色 $f\colon X \times \Gamma(X) \longrightarrow C$ を取る．$|C| < |\Gamma(X)|$ だから C は整列順序集合としてよい．$x \in X, c \in C$ に対して $A(x, c) := \{\alpha \in \Gamma(X) \mid f(x, \alpha) = c\}$ と置く．任意の $x \in X$ に対してある $c \in C$ が存在して $|A(x, c)| \geq 2$ となる．

$\because$) そうでないと仮定する．即ちある $x \in X$ が存在して，任意の $c \in C$ に対して $|A(x, c)| \leq 1$ となるとする．このとき $f(x, -)\colon \Gamma(X) \longrightarrow C$ は単射である．故に $|C| < |\Gamma(X)|$ に矛盾する．

よって $g(x) := \min\{c \in C \mid |A(x, c)| \geq 2\}$ と定義することができる．この $g\colon X \longrightarrow C$ は単射である．

$\because$) g が単射でないと仮定すると，$x, y \in X$ で $x \neq y$，$c := g(x) = g(y)$ となるものが取れる．このとき $\alpha, \beta \in \Gamma(X)$ で $f(x, \alpha) = c$，$f(y, \beta) = c$ となるものが存在するから f が彩色であることに矛盾する．

故に $|X| \leq |C|$ となり X は整列可能である． $\square$

証明から，次の同値も成り立つことが分かる．

定理 2. 選択公理 $\Longleftrightarrow$ グラフ G が λ_0-彩色可能かつ λ_1-彩色可能ならば，ある基数 μ が存在して $\mu \leq \lambda_0$，$\mu \leq \lambda_1$ かつ G が μ-彩色可能となる． $\square$

更に，次も成り立つ．

定理 3. 選択公理 $\Longleftrightarrow$ グラフ G が λ_0-彩色可能かつ λ_1-彩色可能ならば，ある基数 μ が存在して $\mu \leq^* \lambda_0$，$\mu \leq^* \lambda_1$ かつ G が μ-彩色可能となる．

証明. ($\Longrightarrow$) 明らか．

($\Longleftarrow$) X を集合とする．グラフ $\overline{G}(X, \Gamma(\mathcal{P}(X)))$ は $|X|$-彩色可能かつ $|\Gamma(\mathcal{P}(X))|$-彩色可能だから，仮定により，ある基数 λ が存在して，$\lambda \leq^* |X|$，$\lambda \leq^* |\Gamma(\mathcal{P}(X))|$ かつ

$\overline{G}(X,\Gamma(\mathcal{P}(X)))$ が λ-彩色可能である．$\lambda < |\Gamma(\mathcal{P}(X))|$ となる．

> $\because$) $\lambda \leq^* |\Gamma(\mathcal{P}(X))|$ で $\Gamma(\mathcal{P}(X))$ が整列可能だから，$\lambda \leq |\Gamma(\mathcal{P}(X))|$ となる．$\lambda = |\Gamma(\mathcal{P}(X))|$ と仮定すると $|\Gamma(\mathcal{P}(X))| \leq^* |X|$ である．即ち全射 $f\colon X \longrightarrow \Gamma(\mathcal{P}(X))$ が存在する．このとき $f^{-1}\colon \Gamma(\mathcal{P}(X)) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ は単射であり矛盾する．

よって定理 1 の 3$\Longrightarrow$1 の証明と同様にして X が整列可能であることがわかる． $\square$

定理 4. 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 選択公理
2. 任意のグラフは既約な彩色を持つ.
3. 任意の集合 X に対して，グラフ $G(X,\Gamma(X))$ は既約な彩色を持つ.

証明. ($1 \Longrightarrow 2$) (V,E) をグラフとする．V の整列順序 $\leq$ を取る．$f\colon V \longrightarrow V$ を $f(x) := \min(V \setminus \{f(y) \mid y < x,\ yEx\})$ で定めれば f は既約な彩色である．

($2 \Longrightarrow 3$) 明らか.

($3 \Longrightarrow 1$) 無限集合 X が整列可能であることを示す．仮定 3 より，$G(X,\Gamma(X))$ の既約な彩色 $f\colon X\times\Gamma(X) \longrightarrow C$ が存在する．$\pi_1\colon X\times\Gamma(X) \longrightarrow X$，$\pi_2\colon X\times\Gamma(X) \longrightarrow \Gamma(X)$ を標準射影とする．$c_0 \in C$ を一つ取り，$M := f^{-1}(c_0)$，$S_1 := \pi_1(M)\times\Gamma(X)$，$S_2 := X\times\pi_2(M)$，$C_1 := f(S_1)$，$C_2 := f(S_2)$ と定める．

f は彩色だから，$c \in C$ に対して $\pi_1|_{f^{-1}(c)}, \pi_2|_{f^{-1}(c)}$ は単射である．よって $|\pi_1(M)| = |f^{-1}(c_0)| = |\pi_2(M)|$ となる．また $|f^{-1}(c)| \leq |\Gamma(X)|$ となり，$f^{-1}(c)$ に整列順序が入る．よって $S \subset X\times\Gamma(X)$ に対して写像 $g\colon f(S) \longrightarrow S$ を $g(c) := \min(S \cap f^{-1}(c))$ で定めることができる．この g は明らかに単射である．故に $|f(S)| \leq |S|$ となる．従って $|C_1| = |f(S_1)| \leq |S_1| = |\pi_1(M)\times\Gamma(X)|$ となり C_1 も整列順序が入る．また

$$|C_2| = |f(S_2)| \leq |S_2| = |X\times\pi_2(M)| = |X\times\pi_1(M)| \leq |X\times X|$$

となる．$\Gamma(X) = \Gamma(X\times X)$ だから，$|\Gamma(X)| \not\leq |C_2|$ である．一方，$x \in X$ に対して $\Gamma(X) \ni \alpha \longmapsto f(x,\alpha) \in C$ は単射である．故に $A_x := \{\langle w,c\rangle \in \Gamma(X)\times C_1 \mid f(x,\alpha) = c\} \neq \emptyset$ となる．$\Gamma(X), C_1$ は整列されているから $h\colon X \longrightarrow \Gamma(X)\times C_1$ を $h(x) := \min A_x$ で定めることができる．この h は単射だから X も整列可能である． $\square$

参考文献

[1] F. Galvin and P. Komjáth, Graph Colorings and the Axiom of Choice, Period. Math. Hungar. 22 (1991), 71–75