一般連続体仮説と選択公理

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2015 年 12 月 20 日

定義. 無限濃度 κ に対して次の命題を $\mathrm{CH}(\kappa)$ で表す.

$$\kappa \le \mu \le 2^\kappa \Longrightarrow \kappa = \mu \text{ または } \mu = 2^\kappa$$

定義. 次の命題を一般連続体仮説 (Generalized Continuum Hypothesis) という.

$$\text{任意の無限濃度}\kappa\text{に対して } \mathrm{CH}(\kappa).$$

補題 1. $\kappa + 1 < 2^\kappa$.

証明. $\kappa + 1 = 2^\kappa$ と仮定する. $|X| = \kappa$ となる集合 X と $\infty \notin X$ となる ∞ を取れば, 全単射 $g\colon \mathcal{P}(X) \longrightarrow X \cup \{\infty\}$ が取れる. $g(X) = \infty$ としてよい. $f\colon \kappa^* \longrightarrow X \cup \{\infty\}$ を

$$f(\alpha) := \begin{cases} g(A_\alpha) & (A_\alpha \subset X \text{ のとき. ここで } A_\alpha := \{f(\beta) \mid \beta < \alpha\}) \\ \infty & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

で定める. $\alpha < \beta < \kappa^*$ が $f(\alpha), f(\beta) \neq \infty$ を満たすならば $f(\alpha) \neq f(\beta)$ である. よって, κ^* の定義から, $f(\alpha) = \infty$ となる $\alpha < \kappa^*$ が存在する. このとき $\gamma := \min\{\alpha < \kappa^* \mid f(\alpha) = \infty\}$ と置けば $f|_\gamma\colon \gamma \longrightarrow X$ は全単射である. 故に X は整列可能であることが分かる. 従って $\kappa = \kappa + 1 = 2^\kappa$ となり矛盾する. □

補題 2. $\kappa \ge \aleph_0$ ならば $2^\kappa \not\le \kappa^{<\omega}$.

証明. $2^\kappa \le \kappa^{<\omega}$ と仮定する. $|X| = \kappa$ となる集合 X を取れば, 単射 $h\colon \mathcal{P}(X) \longrightarrow X^{<\omega}$ が存在する. $\mathcal{W} := \{(Y, R) \mid Y \subset X \text{ は無限集合}, (Y, R) \text{ は整列順序 }\}$ と置く. $(Y, R) \in \mathcal{W}$ を取る. 全単射 $k_{(Y,R)}\colon Y \longrightarrow Y^{<\omega}$ が取れる.

∵) 順序数・濃度の簡単なまとめの命題 6 の証明から分かるように, 全単射 $Y \times Y \longrightarrow Y$ が標準的に取れる. これを使えば順序数・濃度の簡単なまとめの命題 11 の証明と

同様にして全単射 $k_{(Y,R)}\colon Y \longrightarrow Y < \omega$ が取れる．

$$D_{(Y,R)} := \{x \in Y \mid \text{ある } Z \subset X \text{ が存在して } h(Z) = k_{(Y,R)}(x) \text{ かつ } x \notin Z\}$$

と定義する．$D_{(Y,R)} \in \mathcal{P}(X)$ であるから $h(D_{(Y,R)}) \in X^{<\omega}$ である．

ここで $h(D_{(Y,R)}) \in Y^{<\omega}$ と仮定すると，$k_{(Y,R)}$ が全単射だから，ある $y \in Y$ により $k_{(Y,R)}(y) = h(D_{(Y,R)})$ と書ける．すると $D_{(Y,R)}$ の定義より

$$\begin{aligned} y \in D_{(Y,R)} &\iff \text{ある } Z \subset X \text{ が存在して } h(Z) = k_{(Y,R)}(y) \text{ かつ } y \notin Z \\ &\iff \text{ある } Z \subset X \text{ が存在して } h(Z) = h(D_{(Y,R)}) \text{ かつ } y \notin Z \\ &\iff y \notin D_{(Y,R)} \end{aligned}$$

となり矛盾する．故に $h(D_{(Y,R)}) \notin Y^{<\omega}$ である．

よって有限列 $h(D_{(Y,R)})$ には $X \setminus Y$ の元が少なくとも一つ現れるから，一番最初に現れたものを $g(Y,R)$ と書く．こうして写像 $g\colon \mathcal{W} \longrightarrow X$ が定義されるが，これは $(Y,R) \in \mathcal{W}$ に対して $g(Y,R) \in X \setminus Y$ を満たす．

今，$\kappa \geq \aleph_0$ だから $\mathbb{N} \subset X$ としてよい．すると写像 $f\colon \kappa^* \longrightarrow X$ が

$$f(\alpha) := g(X_\alpha, R_\alpha) \qquad \begin{pmatrix} \text{ここで } X_\alpha := \mathbb{N} \cup \{f(\beta) \mid \beta < \alpha\} \text{ として} \\ R_\alpha \text{は } 0 < 1 < \cdots < f(0) < f(1) < \cdots \\ \text{から定まる } X_\alpha \text{の整列順序とする．} \end{pmatrix}$$

で定まる．この f は単射だから κ^* の定義に矛盾する． □

定理． $\mathrm{CH}(\kappa)$ ならば $\kappa^2 = 2 \cdot \kappa = \kappa$．

証明． $\mathrm{CH}(\kappa)$ とすると $\kappa \leq \kappa + 1 < 2^\kappa$ から $\kappa = \kappa + 1$ である．よって

$$\kappa \leq 2 \cdot \kappa \leq 2 \cdot 2^\kappa = 2^{\kappa+1} = 2^\kappa$$

となる．$2 \cdot \kappa = 2^\kappa$ と仮定すると補題 2 に矛盾するから，$\mathrm{CH}(\kappa)$ により $\kappa = 2 \cdot \kappa$ である．よって

$$\kappa \leq \kappa^2 \leq (2^\kappa)^2 = 2^{2 \cdot \kappa} = 2^\kappa$$

である．$\kappa^2 = 2^\kappa$ と仮定すると補題 2 に矛盾するから，$\mathrm{CH}(\kappa)$ により $\kappa = \kappa^2$ である． □

系． 一般連続体仮説 $\Longrightarrow$ 選択公理 □

定理． $\mathrm{CH}(\kappa)$ かつ $\mathrm{CH}(2^\kappa)$ ならば $2^\kappa = \kappa^*$．

証明. $2^{\kappa^*} \leq 2^{2^{\kappa^2}}$ である．

<table><tr><td>

$\because)$ $|X| = \kappa$ となる集合 X を取る．$|\mathcal{P}(\Gamma(X))| = 2^{\kappa^*}$ である．$\Delta \subset \Gamma(X)$ を取る．$\alpha \in \Delta$ に対して $\mathcal{S}_\alpha := \{R \mid R$ はある $Y \subset X$ の整列順序で $(Y, R) \cong \alpha\}$ とすれば $\mathcal{S}_\alpha \subset \mathcal{P}(X \times X)$ である．写像 $f\colon \mathcal{P}(\Gamma(X)) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(X \times X))$ を $f(\Delta) := \displaystyle\bigcup_{\alpha \in \Delta} \mathcal{S}_\alpha$ と定義する．この f は単射である．

</td></tr></table>

CH(κ) により $\kappa + 1 = \kappa$，$\kappa^2 = \kappa$ だから

$$
\begin{aligned}
2^\kappa &\leq 2^\kappa + \kappa^* < 2^{2^\kappa + \kappa^*} = 2^{2^\kappa} \cdot 2^{\kappa^*} \leq 2^{2^\kappa} \cdot 2^{2^{\kappa^2}} \\
&= 2^{2^\kappa} \cdot 2^{2^\kappa} = 2^{2^\kappa + 2^\kappa} = 2^{2^{\kappa+1}} \\
&= 2^{2^\kappa}
\end{aligned}
$$

となり，CH(2^κ) より $2^\kappa = 2^\kappa + \kappa^*$ である．故に $\kappa^* \leq 2^\kappa$ だから $\kappa < \kappa + \kappa^* \leq 2^\kappa + 2^\kappa = 2^\kappa$ となるので，CH(κ) により $\kappa + \kappa^* = 2^\kappa$ である．故に $2^\kappa = \kappa^*$ である． □

定義. 次の命題を Aleph Hypothesis という．

$$\text{任意の順序数}\, \alpha \,\text{に対して}\ 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}.$$

明らかに，ZFC では「一般連続体仮説 $\Longleftrightarrow$ Aleph Hypothesis」である．

定理. ZF において次が成り立つ．

1. 一般連続体仮説 $\Longrightarrow$ 選択公理
2. Aleph Hypothesis $\Longrightarrow$ 選択公理
3. 一般連続体仮説 $\Longleftrightarrow$ Aleph Hypothesis

証明. (1) 既に示したが別の証明方法として，選択公理が次の命題と同値であることからも従う: 任意の濃度 κ に対して「$\kappa \leq \mu_0 \leq 2^\kappa$，$\kappa \leq \mu_1 \leq 2^\kappa$ なる濃度 μ_0, μ_1 は比較可能」である．(濃度の比較可能性を参照．)

(2) 選択公理が「整列集合の冪集合は整列可能」と同値であることから従う．(整列可能定理についてを参照．)

(3) 1，2 により明らか． □

<table><tr><td>

※ 一般連続体仮説と Aleph Hypothesis の特殊な場合として，連続体仮説 (CH($\aleph_0$)) と $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ があるが，この二つは ZF で同値ではない．

</td></tr></table>

参考文献

[1] A. Kanamori and D. Pincus, Does GCH Imply AC Locally?, Paul Erds and His Mathematics, Bolyai Society Mathematical Studies, volume II, 413–426. Berlin, Springer (2002), http://math.bu.edu/people/aki/