順序集合の不動点定理と選択公理

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2014 年 8 月 23 日

定義. X を順序集合とする.

1. X が帰納的 $\iff$ 任意の部分全順序集合 $C \subset X$ が上界を持つ.
2. X が鎖完備 $\iff$ 任意の部分全順序集合 $C \subset X$ が上限を持つ.
3. X が準帰納的 $\iff$ 任意の部分整列順序集合 $C \subset X$ が上界を持つ.
4. X が準鎖完備 $\iff$ 任意の部分整列順序集合 $C \subset X$ が上限を持つ.
5. $x \in X$ に対して $x^{\downarrow} := \{y \in X \mid y < x\}$ と置く.

定義. $P =$ 帰納的，鎖完備，準帰納的，準鎖完備，に対して命題 $\mathrm{F}_i(P)$ を以下のように定める.

1. $\mathrm{F}_1(P) \iff X$ が P 順序集合で，写像 $f\colon X \longrightarrow X$ が「任意の $x \in X$ に対して上限 $\sup\{x, f(x)\}$ が存在する」を満たすならば，$\varphi(x) := \sup\{x, f(x)\}$ は不動点を持つ.
2. $\mathrm{F}_2(P) \iff X$ が P 順序集合で，写像 $f\colon X \longrightarrow X$ が「任意の $x \in X$ に対して $x \leq f(x)$」を満たすならば，f は不動点を持つ.
3. $\mathrm{F}_3(P) \iff X$ が P 順序集合で，順序を保つ写像 $f\colon X \longrightarrow X$ が「ある $x \in X$ について $x \leq f(x)$」を満たすならば，f は不動点を持つ.
4. $\mathrm{F}_4(P) \iff X$ が P 順序集合で，順序を保つ写像 $f\colon X \longrightarrow X$ が「任意の $x \in X$ について $x \leq f(x)$」を満たすならば，f は不動点を持つ.

定理 1. 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 選択公理
2. $P =$ 帰納的，鎖完備，準帰納的，準鎖完備，に対する $\mathrm{F}_1(P)$，$\mathrm{F}_2(P)$

3. $P=$ 鎖完備，準鎖完備，に対する $\mathrm{F}_3(P)$，$\mathrm{F}_4(P)$

証明.「A ならば B」を「$A \to B$」と書くとき，以下は明らかである．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{F}_1(\text{帰納的}) \arrow[d] & \mathrm{F}_2(\text{帰納的}) \arrow[d] & & \\
\mathrm{F}_1(\text{鎖完備}) \arrow[d] & \mathrm{F}_2(\text{鎖完備}) \arrow[d] & \mathrm{F}_3(\text{鎖完備}) \arrow[r] \arrow[dd] & \mathrm{F}_4(\text{鎖完備}) \arrow[dd] \\
\mathrm{F}_1(\text{準帰納的}) \arrow[d] & \mathrm{F}_2(\text{準帰納的}) \arrow[d] & & \\
\mathrm{F}_1(\text{準鎖完備}) & \mathrm{F}_2(\text{準鎖完備}) & \mathrm{F}_3(\text{準鎖完備}) \arrow[r] & \mathrm{F}_4(\text{準鎖完備})
\end{tikzcd}$$

よって以下を示せばよい．

- 選択公理 $\Longrightarrow \mathrm{F}_1(\text{帰納的})$
- $\mathrm{F}_1(P) \Longrightarrow \mathrm{F}_2(P)$
- $P=$ 鎖完備，準鎖完備に対する $\mathrm{F}_2(P) \Longrightarrow \mathrm{F}_3(P)$
- $\mathrm{F}_4(\text{準鎖完備}) \Longrightarrow$ 選択公理

(選択公理 $\Longrightarrow \mathrm{F}_1(\text{帰納的})$) Zorn の補題により，$X$ は極大元 $x \in X$ を持つ．φ の定義より $x \leq \varphi(x)$ だから，x の極大性から $x=\varphi(x)$ となり x が φ の不動点である．

($\mathrm{F}_1(P) \Longrightarrow \mathrm{F}_2(P)$) $x \leq f(x)$ だから, $\sup\{x, f(x)\} = f(x)$ は存在する．よって $\mathrm{F}_1(P)$ より $\varphi(x) := \sup\{x, f(x)\}$ が不動点 y を持つ．このとき $y=\varphi(y)=\sup\{y, f(y)\} = f(y)$ だから y は f の不動点である．

($\mathrm{F}_2(\text{鎖完備}) \Longrightarrow \mathrm{F}_3(\text{鎖完備})$) $A := \{x \in X \mid x \leq f(x)\}$ と置く．f が順序を保つので，$x \leq f(x)$ ならば $f(x) \leq f(f(x))$，故に $f|_A\colon A \longrightarrow A$ となる．部分全順序 $W \subset A$ を取る．X が鎖完備だから上限 $s=\sup W \in X$ が存在する．任意の $w \in W$ を取る．$w \leq s$ だから $f(w) \leq f(s)$ である．$w \in A$ だったから $w \leq f(w) \leq f(s)$ となる．即ち，任意の $w \in W$ に対して $w \leq f(s)$ である．故に上限の定義から $s \leq f(s)$ となり $s \in A$ である．即ち $W \subset A$ は A の中に上界を持つことが分かった．よって仮定 $\mathrm{F}_2(\text{鎖完備})$ から $f|_A$ は不動点を持つ．

($\mathrm{F}_2(\text{準鎖完備}) \Longrightarrow \mathrm{F}_3(\text{準鎖完備})$) 同様.

($\mathrm{F}_4(\text{準鎖完備}) \Longrightarrow$ 選択公理) 整列可能定理を示す．任意の集合 S を取る．

$$X := \{\langle T, \leq_T \rangle \mid T \subset S,\ \leq_T \text{ は } T \text{ の整列順序 }\}$$

と置く．X に順序 $\leq$ を

$$\langle T, \leq_T\rangle < \langle U, \leq_U\rangle \iff \text{ある } u \in U \text{ が存在して } \langle T, \leq_T\rangle = \langle u^{\downarrow}, \leq_U|_{u^{\downarrow}}\rangle$$

と定める．$\langle X, \leq\rangle$ は準鎖完備順序集合である．直積 $Y := X \times \mathbb{N}$ に辞書式順序を入れ，写像 $f\colon Y \longrightarrow Y$ を $f(T, n) := \langle T, n+1\rangle$ で定める．f は明らかに不動点を持たず，$y \in Y$ に対して $y \leq f(y)$ を満たす．よって仮定より Y は準鎖完備でない．故に部分整列順序集合 $W \subset Y$ で上限を持たないものが存在する．このとき $W_1 := \{T \mid \langle T, n\rangle \in W\} \subset X$ は部分整列順序集合である．故に上限 $T = \sup W_1 \in X$ を持つ．

$T \subsetneq S$ と仮定する．

(i) $T \in W_1$ のとき

$s \in S \setminus T$ を取り，T に s を最大元として付け加えた順序集合を T^+ とする．このとき $T^+ \in X$ で，明らかに $\langle T^+, 0\rangle = \sup W$ となり矛盾する．

(ii) $T \notin W_1$ のとき

明らかに $\langle T, 0\rangle = \sup W$ となり矛盾する．

(i)(ii) より $T = S$ が分かり，S は整列可能である． □

参考文献

[1] A. Abian, A fixed point theorem equivalent to the axiom of choice, Arch. math. Logik 25 (1985), 173–174,

[2] Milan R. Taskovic, New Equivalents of the Axiom of Choice and Consequences, Mathematica Moravica vol 13 (2009), 77-94