関数解析学と選択公理

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2013 年 10 月 26 日

ZF では証明できない関数解析学の定理として Hahn-Banach の定理が有名である．Hahn-Banach の定理はある種の写像の延長の存在を保証する定理だが，実は Hahn-Banach の定理に「延長に関する条件」を付け加えると，選択公理と同値になることが知られている．

定義. V を実線型空間とする．

1. $S \subset V$ が凸集合
   $\iff$ 任意の二点 $u, v \in S$ に対し $\{tu + (1-t)v \mid t \in [0,1]\} \subset S$
2. $S \subset V$ を凸集合とする．$x \in S$ が extreme point
   $\iff$ 任意の二点 $u, v \in S$ に対し $x \notin \{tu + (1-t)v \mid t \in (0,1)\}$
3. $p : V \longrightarrow \mathbb{R}$ が劣線型汎関数 (sublinear functional)
   $\iff$ 任意の $v, w \in V$ と任意の実数 $\xi \geq 0$ に対し

$$p(v+w) \leq p(v) + p(w),\ p(\xi v) = \xi p(v)$$

※ このとき $p(0) = p(0v) = 0p(v) = 0$ であり，

$$0 = p(0) = p(v + (-v)) \leq p(v) + p(-v)$$

だから $-p(-v) \leq p(v)$ である．

定義. X を集合とし，$f, g\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ を部分関数とする (定義域を dom で表す)．$S \subset X$ を部分集合とするとき

$$f \leq_S g \iff S \subset \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g) \text{ かつ任意の } x \in S \text{ に対し } f(x) \leq g(x)$$
$$f =_S g \iff S \subset \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g) \text{ かつ任意の } x \in S \text{ に対し } f(x) = g(x)$$

と定義する．$f =_S g \iff f \leq_S g$ かつ $g \leq_S f$ である．

定義． V を実線型空間，$p, f\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$ を部分関数とする．更に p は劣線型，f は線型で，$f \leq_{\mathrm{dom}(f)} p$ を満たすとする．このとき

$$Z(p,f) := \{g\colon \mathrm{dom}(p) \longrightarrow \mathbb{R} : \text{線型汎関数} \mid g =_{\mathrm{dom}(f)} f,\ g \leq_{\mathrm{dom}(p)} p\}$$

と書く．明らかに $Z(p,f)$ は凸集合である．

命題 (Hahn-Banach の定理)**．** 選択公理を仮定する．V を実線型空間，$W \subset V$ を部分空間として，$p\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$ を劣線型汎関数とする．$f\colon W \longrightarrow \mathbb{R}$ を線型汎関数とし，$f \leq_W p$ を満たすとする．このとき $Z(p,f) \neq \emptyset$ である．

証明． $A := \{\varphi\colon V \longrightarrow \mathbb{R} : \text{部分線型汎関数} \mid W \subset \mathrm{dom}(\varphi),\ \varphi \leq_{\mathrm{dom}(\varphi)} p,\ \varphi =_W f\}$ と置き，A に順序を包含関係 $\subset$ で定める．$C \subset A$ を全順序部分集合とすると，$\varphi := \bigcup_{\psi \in C} \psi \in A$ は明らかに C の上界である．故に $(A, \subset)$ に Zorn の補題を適用できて，極大元 $\varphi \in A$ を得る．φ の極大性により $\mathrm{dom}(\varphi) = V$ である．故に $\varphi \in Z(p,f)$ である． □

※ Hahn-Banach の定理の証明は選択公理よりも真に弱い BPI (=Boolean Prime Ideal theorem) があれば可能である．

定理 1． 選択公理
$\iff$$V$ を実線型空間，$W \subset V$ を部分空間，$S \subset V$ を部分集合とする．$p\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$ を劣線型汎関数とし，線型汎関数 $f\colon W \longrightarrow \mathbb{R}$ は $f \leq_W p$ を満たすとする．このとき前順序集合 $(Z(p,f), \leq_S)$ の極大元が存在する．

※ 即ちある $g \in Z(p,f)$ が存在して，任意の $h \in Z(p,f)$ に対し「$g \leq_S h$ ならば $g =_S h$」が成り立つ．

証明． ($\Longrightarrow$) Hahn-Banach の定理により $Z(p,f) \neq \emptyset$ であるから，$S \subset W$ のときは明らか．$S \not\subset W$ とする．$\widetilde{W} \subset V$ を W と S で生成される部分空間とする．

$$\mathcal{A} := \left\{ (M, \varphi) \;\middle|\; \begin{array}{l} W \subset M \subset \widetilde{W} \text{は部分空間} \\ M \text{ は } W \text{ と } M \cap S \text{ で生成される} \\ \varphi \text{ は } (Z(p|_M, f), \leq_{M \cap S}) \text{ の極大元} \end{array} \right\}$$

に順序関係 $\leq$ を

$$(M, \varphi) \leq (N, \psi) \iff M \subset N,\ \varphi =_M \psi$$

で定める．$\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ を全順序部分集合とする．$\varphi := \displaystyle\bigcup_{(N,\psi)\in\mathcal{C}} \psi$, $M := \mathrm{dom}(\varphi)$ と定める．明らかに $\varphi \in Z(p|_M, f)$ である．$g \in Z(p|_M, f)$ が $\varphi \leq_{M\cap S} g$ を満たすとする．任意の $s \in M \cap S$ を取る．M の定義よりある $(N,\psi) \in \mathcal{C}$ が存在して $s \in N$ となる．$(N,\psi) \in \mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ だから, ψ は $(Z(p|_N, f), \leq_{N\cap S})$ の極大元. $g|_N \in Z(p|_N, f)$, $\psi \leq_{N\cap S} g$ だから，ψ の極大性により $\psi(s) = g(s)$ である．即ち $\varphi(s) = g(s)$，従って $\varphi =_{M\cap S} g$ が分かり，$\varphi \in Z(p|_M, f)$ は極大元である．故に $(M,\varphi) \in \mathcal{A}$. よって明らかに (M,φ) は $\mathcal{C}$ の上界である．そこで $(\mathcal{A}, \leq)$ に Zorn の補題を適用して極大元 $(M,\varphi) \in \mathcal{A}$ を得る．極大性より $M = \widetilde{W}$ である．このとき Hahn-Banach の定理により $g \in Z(p,\varphi) \subset Z(p,f)$ を取れば，この g が $(Z(p,f), \leq_S)$ の極大元である．

($\Longleftarrow$) 選択公理と同値な AMC を示す.

> ※ AMC (= the Axiom of Multiple Choice) とは次の命題のこと.
>
> $$\text{非空集合の族 } \{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \text{に対し，有限集合の族 } \{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\text{で}$$
> $$\text{任意の}\lambda \in \Lambda\text{に対し}\emptyset \neq F_\lambda \subset X_\lambda\text{となるものが存在する.}$$
>
> 同値性の証明は the Axiom of Multiple Choice を参照.

$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を互いに素な非空集合の族とする．$X := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ として

$$V := \{\varphi \in \mathbb{R}^X \mid \text{有限個の}\lambda \in \Lambda\text{を除いて}\varphi(X_\lambda) = 0\}$$

と定める．V は実線型空間である．$A \subset X$ に対し χ_A で A の特性関数を表す．即ち

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & (x \in A \text{ のとき}) \\ 0 & (x \notin A \text{ のとき}) \end{cases}.$$

特に $x \in X$ に対し $\chi_x := \chi_{\{x\}}$ と書く．$S := \{\chi_x \mid x \in X\} \subset V$, $S_\lambda := \{\chi_x \mid x \in X_\lambda\} \subset V$ と定める．$v \in V$ に対し，$v^+(x) := \max\{v(x), 0\}$ と定義して

$$p(v) := \sum_{\lambda\in\Lambda} \sup_{x\in X_\lambda} v^+(x)$$

と定めると $p : V \longrightarrow \mathbb{R}$ は劣線型汎関数である．$f := 0 \colon 0 \longrightarrow \mathbb{R}$ を線型汎関数として，仮定を適用し極大元 $g \in (Z(p,f), \leq_S)$ を得る．このとき

$$\rho_\lambda := \frac{1}{2} \sup_{x\in X_\lambda} g(\chi_x)$$
$$F_\lambda := \{x \in X_\lambda \mid g(\chi_x) > \rho_\lambda\}$$

と定める.

$\lambda \in \Lambda$ を取り $F_\lambda = \emptyset$ と仮定する．$g =_{S_\lambda} 0$ である．

$\because$) $\rho_\lambda > 0$ と仮定すると，sup の性質によりある $x \in X_\lambda$ が存在して $g(\chi_x) > \rho_\lambda$ である．故に $F_\lambda = \emptyset$ に矛盾する．従って $\rho_\lambda \leq 0$ となる．即ち $g \leq_{S_\lambda} 0$ である．p の定義より明らかに $0 \leq_V p$，故に $0 \in Z(p, f)$ である．よって g の極大性により $g =_{S_\lambda} 0$ である．

$a \in X_\lambda$ を一つ取り，$h\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$ を $h(v) := g((1 - \chi_{X_\lambda})v) + v(a)$ で定める．簡単のため $\chi = \chi_{X_\lambda}$ と書くと，p の定義により

$$p(v) = p((1-\chi)v) + p(\chi v) \geq g((1-\chi)v) + v^+(a) \geq h(v)$$

だから $h \in Z(p, f)$ である．しかし $x \in X$ に対し

$$h(\chi_x) = \begin{cases} \chi_x(a) & (x \in X_\lambda \text{のとき}) = \begin{cases} 1 & (x = a \text{ のとき}) \\ 0 & (x \neq a \text{ のとき}) \end{cases} \\ g(\chi_x) & (x \notin X_\lambda \text{のとき}) \end{cases}$$

であるから $g \leq_S h$ かつ $g \neq_S h$ となり，g の極大性に矛盾する．

故に $F_\lambda \neq \emptyset$ である．また $\rho > 0$ である．

$|F_\lambda| = \infty$ と仮定する．自然数 n を $n\rho > 1$ となるように決める．このとき F_λ から互いに異なる n 個の元 $a_1, \cdots, a_n \in F_\lambda$ が取れる．すると

$$1 = p(\chi_{\{a_1, \cdots, a_n\}}) \geq g(\chi_{\{a_1, \cdots, a_n\}}) = g(\chi_{a_1}) + \cdots + g(\chi_{a_n}) \geq n\rho > 1$$

となり矛盾する．故に $|F_\lambda| < \infty$ となる．

以上より AMC が示された． □

定理 2. 以下の命題は (ZF 上) 同値

1. 選択公理
2. V を実線型空間，$W \subset V$ を部分空間として，$p\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$ を劣線型汎関数とする．$f\colon W \longrightarrow \mathbb{R}$ を線型汎関数とし，$f \leq_W p$ を満たすとする．このとき $Z(p, f)$ は extreme point を持つ．
3. 「実ノルム空間の双対空間」の単位球体は extreme point を持つ．

証明. ($1 \Longrightarrow 2$) 整列可能定理を使って $V \setminus W$ を整列し，順序数 λ を使って $V \setminus W = \{v_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ と書く．$\alpha < \lambda$ に対し $(q_\alpha, K_\alpha, p_\alpha)$ を以下の性質を満たすように超限帰納法で定義する．

(a) $p_\alpha, q_\alpha \colon V \longrightarrow \mathbb{R}$ は劣線型汎関数である．

(b) $f \leq_W p_\alpha$

(c) $p_\alpha(v) \geq -p_0(-v)$

(d) $\beta < \alpha$ のとき $p_\beta \geq_V p_\alpha$

(e) $K_\alpha = Z(p_\alpha, f)$

(i) $\alpha = 0$ のとき．

$$\begin{aligned} q_0 &:= p \\ K_0 &:= \{g \in Z(q_0, f) \mid g \text{ は } (Z(q_0, f), \leq_{\{v_0\}}) \text{ の極大元 }\} \\ p_0(v) &:= \sup_{g \in K_0} g(v) \quad (v \in V) \end{aligned}$$

と定める．この定義が可能なこと，またこれらが性質 (a) から (e) を満たすことを確認する．q_0 が劣線型であることは良い．勿論 $f \leq_W q_0$ である．故に定理 1 により $K_0 \neq \emptyset$ である．$g \in K_0 (\subset Z(q_0, f))$ のとき $g \leq_V q_0$ だから，各 $v \in V$ について $\{g(v) \mid g \in K_0\}$ は上に有界である．故に $p_0(v) = \sup_{g \in K_0} g(v)$ は定義され，特に $p_0 \leq_V q_0$ となる．p_0, K_0 の定義から明らかに，

$$\text{任意の } g \in K_0 \text{に対し } g(v_0) = p_0(v_0) \tag{*}$$

となる．また，任意の $v, w \in V$ と実数 $\xi \geq 0$ に対し

$$\begin{aligned} p_0(v + w) &= \sup_{g \in K_0} g(v + w) = \sup_{g \in K_0} (g(v) + g(w)) \\ &\leq \sup_{g \in K_0} g(v) + \sup_{g \in K_0} g(w) \\ &= p_0(v) + p_0(w) \\ p_0(\xi v) &= \sup_{g \in K_0} g(\xi v) = \sup_{g \in K_0} \xi g(v) \\ &= \xi p_0(v) \end{aligned}$$

だから，$p_0 \colon V \longrightarrow \mathbb{R}$ は劣線型汎関数である．故に (c) $p_0(v) \geq -p_0(-v)$ が成り立つ．また p_0 の定義より $f \leq_W p_0$ だから $Z(p_0, f)$ を考えることができる．このとき (e) $K_0 = Z(p_0, f)$ が分かる．

∵) p_0 の定義より，任意の $g \in K_0$ に対し $g \leq_V p_0$ だから，$K_0 \subset Z(p_0, f)$ は明らか．逆を示すため，$g \in Z(p_0, f)$ を取る．$p_0 \leq_V q_0$ だったから $g \in Z(q_0, f)$ である．また (*)「任意の $g \in K_0$ に対し $g(v_0) = p_0(v_0)$」に気をつけると

$$-p_0(-v_0) = -\sup_{h \in K_0} h(-v_0) = \inf_{h \in K_0} h(v_0) = \inf_{h \in K_0} p_0(v_0) = p_0(v_0).$$

$g \leq_V p_0$ だから $g(v_0) \leq p_0(v_0)$ であり，かつ

$$g(v_0) = -g(-v_0) \geq -p_0(-v_0) = p_0(v_0).$$

故に $g(v_0) = p_0(v_0)$ となる．よって $g \in K_0$ が分かる．

以上より $\alpha = 0$ の時は (a) から (e) が成り立つことが分かった．

(ii) $0 < \alpha < \lambda$ のとき．

$$\begin{aligned} q_\alpha(v) &:= \inf_{\beta<\alpha} p_\beta(v) \quad (v \in V) \\ K_\alpha &:= \{ g \in Z(q_\alpha, f) \mid g \text{ は } (Z(q_\alpha, f), \leq_{\{v_\alpha\}}) \text{ の極大元 } \} \\ p_\alpha(v) &:= \sup_{g \in K_\alpha} g(v) \quad (v \in V) \end{aligned}$$

と置く．この定義が可能なこと，またこれらが性質 (a) から (e) を満たすことを確認する．帰納法の仮定 (c) より $\beta < \alpha$ に対し $p_\beta(v) \geq -p_0(-v)$ だから，$\{p_\beta(v) \mid \beta < \alpha\}$ は下に有界である．故に $q_\alpha(v) = \inf_{\beta<\alpha} p_\beta(v)$ は定義される．任意の $v, w \in V$ と実数 $\xi \geq 0$ に対し

$$\begin{aligned} q_\alpha(v+w) &= \inf_{\beta<\alpha} p_\beta(v+w) \\ &\leq \inf_{\beta<\alpha} (p_\beta(v) + p_\beta(w)) \qquad (\text{帰納法の仮定 (a) による}) \\ &= \inf_{\beta<\alpha} p_\beta(v) + \inf_{\beta<\alpha} p_\beta(w) \quad (\text{帰納法の仮定 (d) による}) \\ &= q_\alpha(v) + q_\alpha(w). \\ q_\alpha(\xi v) &= \inf_{\beta<\alpha} p_\beta(\xi v) = \inf_{\beta<\alpha} \xi p_\beta(v) \quad (\text{帰納法の仮定 (a) による}) \\ &= \xi q_\alpha(v). \end{aligned}$$

即ち $q_\alpha \colon V \longrightarrow \mathbb{R}$ は劣線型汎関数である．帰納法の仮定 (b) により $q_\alpha(v) = \inf_{\beta<\alpha} p_\beta(v) \geq f(v)$ だから $f \leq_W q_\alpha$ である．故に定理 1 により $K_\alpha \neq \emptyset$ である．$g \in K_\alpha (\subset Z(q_\alpha, f))$ のとき $g \leq q_\alpha$ だから，$\{g(v) \mid g \in K_\alpha\}$ は上に有界である．よって $p_\alpha(v) = \sup_{g \in K_\alpha} g(v)$ は定義され，特に $p_\alpha \leq_V q_\alpha$ である．従って $\beta < \alpha$ に対し $p_\alpha(v) \leq q_\alpha(v) = \inf_{\beta<\alpha} p_\beta(v) \leq p_\beta(v)$，即ち (d) が成り立つ．特に $p_\alpha(-v) \leq p_0(-v)$ であるから，$p_\alpha(v) \geq -p_\alpha(-v) \geq -p_0(-v)$，即ち (c) が成り立つ．$p_\alpha, K_\alpha$ の定義から明らかに

$$\text{任意の } g \in K_\alpha \text{ に対し } g(v_\alpha) = p_\alpha(v_\alpha) \tag{**}$$

となる．また，任意の $v, w \in V$ と実数 $\xi \geq 0$ に対し

$$\begin{aligned}
p_\alpha(v+w) &= \sup_{g \in K_\alpha} g(v+w) \\
&= \sup_{g \in K_\alpha} (g(v)+g(w)) \\
&\leq \sup_{g \in K_\alpha} g(v) + \sup_{g \in K_\alpha} g(w) \\
&= p_\alpha(v) + p_\alpha(w). \\
p_\alpha(\xi v) &= \sup_{g \in K_\alpha} g(\xi v) = \sup_{g \in K_\alpha} \xi g(v) \\
&= \xi p_\alpha(v).
\end{aligned}$$

従って $p_\alpha \colon V \longrightarrow \mathbb{R}$ は劣線型汎関数である．また p_α の定義より $f \leq_W p_\alpha$ だから $Z(p_\alpha, f)$ を考えることができる．このとき (e) $K_\alpha = Z(p_\alpha, f)$ が成り立つ．

$\because$) p_α の定義より，任意の $g \in K_\alpha$ に対し $g \leq_V p_\alpha$ だから，$K_\alpha \subset Z(p_\alpha, f)$ は明らか．逆を示すため，$g \in Z(p_\alpha, f)$ を取る．$p_\alpha \leq_V q_\alpha$ だったから $g \in Z(q_\alpha, f)$ である．また (**)「任意の $g \in K_\alpha$ に対し $g(v_\alpha) = p_\alpha(v_\alpha)$」に気をつけると

$$-p_\alpha(-v_\alpha) = -\sup_{h \in K_\alpha} h(-v_\alpha) = \inf_{h \in K_\alpha} h(v_\alpha) = \inf_{h \in K_\alpha} p_\alpha(v_\alpha) = p_\alpha(v_\alpha).$$

$g \leq_V p_\alpha$ だったから $g(v_\alpha) \leq p_\alpha(v_\alpha)$ であり，かつ

$$g(v_\alpha) = -g(-v_\alpha) \geq -p_\alpha(-v_\alpha) = p_\alpha(v_\alpha).$$

故に $g(v_\alpha) = p_\alpha(v_\alpha)$ でなければならない．よって $g \in K_\alpha$ が分かる．

以上により (a) から (e) が成り立つことが分かった．

さて，$v \in V$ に対し $q_\lambda(v) := \inf_{\alpha<\lambda} p_\alpha(v)$ と定める．明らかに，$\alpha < \lambda$ に対し $p_\alpha \geq_V p_\lambda$ である．性質 (b) により $f \leq_W q_\lambda$ であるから，Hahn-Banach の定理により $Z(q_\lambda, f) \neq \emptyset$ である．$0 < \alpha \leq \lambda$ とする．このとき $Z(q_\alpha, f) = \bigcap_{\beta<\alpha} K_\beta$ となる．

$\because$) 任意の $\beta < \alpha$ を取ると，定義より $q_\alpha \leq_V p_\beta$ だから $Z(q_\alpha, f) \subset Z(p_\beta, f) = K_\beta$．故に $Z(q_\alpha, f) \subset \bigcap_{\beta<\alpha} K_\beta$ である．

逆に $g \in \bigcap_{\beta<\alpha} K_\beta$ とする．任意の $\beta < \alpha$ に対し $g \in K_\beta = Z(p_\beta, f)$ だから $g \leq_V p_\beta$ である．よって $g(v) \leq \inf_{\beta<\alpha} p_\beta(v) = q_\alpha(v)$ となり，$g \in Z(q_\alpha, f)$ である．

$\varphi, \psi \in Z(q_\lambda, f)$ とする．$\alpha < \lambda$ とすると $\varphi, \psi \in K_\alpha$ だから $\varphi(v_\alpha) = p_\alpha(v_\alpha) = \psi(v_\alpha)$ である．故に $\varphi =_V \psi$ である．即ち $Z(q_\lambda, f) = \{\varphi\}$ と書ける．この φ が extreme point である．

$\because$) ある $g, h \in Z(p, f)$, $g, h \neq \varphi$ と $0 < t < 1$ を使って $\varphi = tg + (1-t)h$ と書けたと仮定する．$\Gamma := \{\alpha < \lambda \mid g \notin K_\alpha$ または $h \notin K_\alpha\}$ と置く．「全ての $\alpha < \lambda$ について $g \in K_\alpha$」だとすると $\varphi = g$ となるから，$\Gamma \neq \emptyset$ である．そこで $\gamma := \min \Gamma$ が定まる．$\varphi \in K_0$ だから $p_0(v_0) = \varphi(v_0) = tg(v_0) + (1-t)h(v_0)$ となる．$g(v_0), h(v_0) \leq p_0(v_0)$ であるから，$g(v_0) = h(v_0) = p_0(v_0)$ でなければならない．故に $g, h \in K_0$ だから，$\gamma > 0$ である．$g, h \in \bigcap_{\alpha < \gamma} K_\alpha = Z(q_\gamma, f)$ だから $g, h \leq q_\gamma$ となる．「$g \notin K_\gamma$ または $h \notin K_\gamma$」だから，「$g(v_\gamma) < p_\gamma(v_\gamma)$ または $h(x_\gamma) < p_\gamma(v_\gamma)$」である．どちらにしても $\varphi(v_\gamma) = tg(v_\gamma) + (1-t)h(v_\gamma) < p_\gamma(v_\gamma)$ となり，$\varphi \in K_\gamma$ に矛盾する．

($2 \Longrightarrow 3$) $(V, \|\cdot\|_V)$ を実ノルム空間とする．$\|\cdot\|_V \colon V \longrightarrow \mathbb{R}$ は劣線型写像である．そこで $W := 0$, $f := 0 \colon 0 \longrightarrow \mathbb{R}$ として仮定 2 を使えば $Z(\|\cdot\|_V, f) \subset V^*$ は extreme point を持つ．$S \subset V^*$ を単位球体とする．即ち $S := \{g \in V^* \mid \|g\|_{V^*} \leq 1\}$ であるが，$\|g\|_{V^*} \leq 1 \Longleftrightarrow |g(\cdot)| \leq_V \|\cdot\|_V$ である．故に $Z(\|\cdot\|_V, f) = S$ となり，S は extreme point を持つ．

($3 \Longrightarrow 1$) $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を非空集合の族とする．X_λ は互いに素としてよい．$X := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ として

$$V := \left\{ f \in \mathbb{R}^X \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{任意の}\varepsilon > 0 \text{ に対し} \left\{ x \in X \;\middle|\; |f(x)| > \varepsilon \right\} \text{は有限集合,} \\ \displaystyle\sum_{\lambda \in \Lambda} \Big(\sup_{x \in X_\lambda} |f(x)| \Big) < \infty \end{array} \right\}$$

$$W := \left\{ g \in \mathbb{R}^X \;\middle|\; \sup_{\lambda \in \Lambda} \Big(\sum_{x \in X_\lambda} |g(x)| \Big) < \infty \right\}$$

と定める．これらは次のノルムでノルム空間になる．

$$\|f\|_V := \sum_{\lambda \in \Lambda} \Big(\sup_{x \in X_\lambda} |f(x)| \Big)$$
$$\|g\|_W := \sup_{\lambda \in \Lambda} \Big(\sum_{x \in X_\lambda} |g(x)| \Big)$$

$S := \left\{ g \in W \;\middle|\; \|g\|_W \leq 1 \right\} \subset W$ を単位球体とする．$V^* := \{\xi \colon V \longrightarrow \mathbb{R} \colon$ 有界線型 $\}$ を V の双対空間とすると，後で述べる補題 1 により等長同型 $W \cong V^*$ が成り立つ．これにより S を V^* 内の単位球体とみなす．仮定より S は extreme point $e \in S$ を持つ．任意の $\lambda \in \Lambda$ を取る．$e(x) \neq 0$ となる $x \in X_\lambda$ が一意に存在する．

$\because$) まず存在を示す．その為に，全ての $x \in X_\lambda$ について $e(x) = 0$ であると仮定する．$u \in X_\lambda$ を一つ取り，$x \in X$ に対し

$$f(x) := \begin{cases} 1 & (x = u \text{ のとき}) \\ e(x) & (x \neq u \text{ のとき}) \end{cases}, \quad g(x) := \begin{cases} -1 & (x = u \text{ のとき}) \\ e(x) & (x \neq u \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定めると $f, g \in S$ であり，これらは $f \neq e,\ g \neq e,\ e = \dfrac{f+g}{2}$ を満たす．即ち e が extreme point であることに矛盾する．故に $e(x) \neq 0$ となる $x \in X_\lambda$ は存在する．

次に一意性を示す．その為に，$u, v \in X_\lambda, u \neq v$ が $e(u), e(v) \neq 0$ を満たすと仮定する．

$$f(x) := \begin{cases} e(u)(1 + |e(v)|) & (x = u \text{ のとき}) \\ e(v)(1 - |e(u)|) & (x = v \text{ のとき}) \\ e(x) & (x \neq u, v \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$g(x) := \begin{cases} e(u)(1 - |e(v)|) & (x = u \text{ のとき}) \\ e(v)(1 + |e(u)|) & (x = v \text{ のとき}) \\ e(x) & (x \neq u, v \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定めると $f, g \in S$ であり，これらは $f \neq e,\ g \neq e,\ e = \dfrac{f+g}{2}$ を満たす．即ち e が extreme point であることに矛盾する．故に $e(x) \neq 0$ となる $x \in X_\lambda$ は一意的である．

そこで $F\colon \Lambda \longrightarrow X = \bigcup X_\lambda$ を $F(\lambda) := (e(x) \neq 0$ となる $x \in X_\lambda)$ で定めれば F が選択関数となる． □

さて，関数解析において次のような定理がある．

命題 (Banach-Alaoglu の定理)**.** ノルム空間 X の双対空間 X^* の閉単位球体 $B \subset X^*$ は弱*位相でコンパクトである．

命題 (Krein-Milman の定理)**.** 局所凸位相線型空間のコンパクト凸集合は extreme point を持つ．

定理 3. 選択公理 $\Longleftrightarrow$ Banach-Alaoglu の定理 + Krein-Milman の定理

証明. ($\Longrightarrow$) 略

($\Longleftarrow$) 定理 2 の条件 3 を示す．X を実ノルム空間とする．X^* は局所凸位相線型空間で，単位球体 $B \subset X^*$ は凸集合である．Banach-Alaoglu により $B \subset X^*$ はコンパクト

である．故に Klein-Milman の定理により B は extreme point を持つ． $\square$

補題 1. 等長同型 $W \cong V^*$ が成り立つ．

証明. $f \in V,\ g \in W$ に対し

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda\in\Lambda}\Bigl(\sum_{x\in X_\lambda}|g(x)||f(x)|\Bigr) &\le \sum_{\lambda\in\Lambda}\Bigl(\bigl(\sup_{y\in X_\lambda}|f(y)|\bigr)\sum_{x\in X_\lambda}|g(x)|\Bigr)\\ &\le \Bigl(\sup_{\lambda\in\Lambda}\sum_{x\in X_\lambda}|g(x)|\Bigr)\Bigl(\sum_{\lambda\in\Lambda}\sup_{y\in X_\lambda}|f(y)|\Bigr)\\ &\le \|g\|_W\|f\|_V\end{aligned}$$

故に $\displaystyle\sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{x\in X_\lambda} g(x)f(x)$ は絶対収束する．そこで

$$\varphi(g)(f) := \sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{x\in X_\lambda} g(x)f(x)$$

と定義する．$\varphi(g) : f \mapsto \varphi(g)(f)$ は V^* の元である．故に線型写像 $\varphi : W \longrightarrow V^*$ が得られる．また $\|\varphi(g)\|_{V^*} \le \|g\|_V$ も分かる．

任意の $\varepsilon > 0$ を取る．$\|g\|_W$ の定義と sup の性質により，ある $\mu \in \Lambda$ が存在して $\displaystyle\sum_{x\in X_\mu}|g(x)| > \|g\|_W - \frac{\varepsilon}{2}$ となる．更に，ある有限部分集合 $A \subset X_\mu$ が存在して $\displaystyle\sum_{x\in A}|g(x)| > \sum_{x\in X_\mu}|g(x)| - \frac{\varepsilon}{2}$ とできる．そこで $h \in V$ を

$$h(x) := \begin{cases} 1 & (x \in A \text{ かつ } g(x) > 0 \text{ のとき})\\ -1 & (x \in A \text{ かつ } g(x) < 0 \text{ のとき})\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$

で定義すれば $\|h\|_V = 1$ であり，

$$\begin{aligned}\|\varphi(g)\|_{V^*} &= \sup_{0\ne f\in V}\frac{|\varphi(g)(f)|}{\|f\|_V}\\ &\ge \frac{|\varphi(g)(h)|}{\|h\|_V}\\ &= \sum_{x\in A}|g(x)|\\ &> \|g\|_W - \varepsilon.\end{aligned}$$

故に $\|\varphi(g)\|_{V^*} > \|g\|_W - \varepsilon$ となる．$\varepsilon > 0$ は任意だったから，$\|\varphi(g)\|_{V^*} \ge \|g\|_W$ が分かる．即ち $\|\varphi(g)\|_{V^*} = \|g\|_W$ であり，φ は等長写像である．

任意の $\xi \in V^*$ を取る．$x \in X$ に対し $\chi_x := \chi_{\{x\}} \in V$ を特性関数として $g_\xi(x) := \xi(\chi_x)$ と置く．$g_\xi \in W$ である．

$\because$) $g_\xi \notin W$ と仮定する．$g_\xi \in \mathbb{R}^X$ だから

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}\Big(\sum_{x\in X_\lambda}|g(x)|\Big) = \infty$$

でなければならない．つまりある $\mu \in \Lambda$ が存在して $\sum_{x\in X_\mu}|g(x)| > \|\xi\|_{V^*} + 1$ となる．更に，ある有限部分集合 $A \subset X_\mu$ が存在して $\sum_{x\in A}|g(x)| > \|\xi\|_{V^*}$ とできる．そこで $h \in V$ を

$$h(x) := \begin{cases} 1 & (x \in A \text{ かつ } g(x) > 0 \text{ のとき}) \\ -1 & (x \in A \text{ かつ } g(x) < 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

で定義すれば $\|h\|_V = 1$ であり，

$$|\xi(h)| = \Big|\xi\Big(\sum_{x\in A}h(x)\chi_x\Big)\Big| = \Big|\sum_{x\in A}h(x)\xi(\chi_x)\Big| = \sum_{x\in A}|g_\xi(x)| > \|\xi\|_{V^*}.$$

故に

$$\|\xi\|_{V^*} = \sup_{0\neq f\in V}\frac{|\xi(f)|}{\|f\|_V} \geq \frac{|\xi(h)|}{\|h\|_V} > \|\xi\|_{V^*}$$

となり矛盾する．

任意の $f_0 \in V$ を取る．

任意の $\varepsilon > 0$ を取ると，$\varphi(g), \xi \in V^*$ は有界，即ち連続だから，ある $\delta > 0$ が存在して任意の $f \in V$ に対し

$$\|f - f_0\|_V < \delta \Longrightarrow |\varphi(g)(f) - \varphi(g)(f_0)| < \frac{\varepsilon}{2},\ |\xi(f) - \xi(f_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

(i) $n := \big|\{\lambda \in \Lambda \mid \exists x \in X_\lambda(f_0(x) \neq 0)\}\big| < \infty$ のとき．
$\{\lambda \in \Lambda \mid \exists x \in X_\lambda(f_0(x) \neq 0)\} = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ と書く．V の定義より $A := \{x \in X \mid |f(x)| \geq \frac{\delta}{n}\}$ は有限集合となる．そこで $f \in V$ として

$$f(x) := \begin{cases} f_0(x) & (x \in A \text{ のとき}) \\ 0 & (x \notin A \text{ のとき}) \end{cases}$$

を取れば

$$\begin{aligned}\|f-f_0\|_V &= \sum_{\lambda\in\Lambda}\Bigl(\sup_{x\in X_\lambda}|f(x)-f_0(x)|\Bigr)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\Bigl(\sup_{x\in X_{\lambda_i}\setminus A}|f_0(x)|\Bigr)\\ &< \sum_{i=1}^{n}\frac{\delta}{n}=\delta.\end{aligned}$$

更に

$$\begin{aligned}\varphi(g_\xi)(f) &= \sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{x\in X_\lambda}g_\xi(x)f(x)=\sum_{x\in A}g_\xi(x)f(x)=\sum_{x\in A}\xi(\chi_x)f(x)\\ &= \xi\Bigl(\sum_{x\in A}f(x)\chi_x\Bigr)=\xi(f)\end{aligned}$$

故に

$$\begin{aligned}|\varphi(g_\xi)(f_0)-\xi(f_0)| &\le |\varphi(g_\xi)(f_0)-\varphi(g_\xi)(f)|+|\xi(f)-\xi(f_0)|\\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

(ii) $\bigl|\{\lambda\in\Lambda\mid \exists x\in X_\lambda(f_0(x)\neq 0)\}\bigr|=\infty$ のとき．
$\|f_0\|_V=\sum_{\lambda\in\Lambda}\Bigl(\sup_{x\in X_\lambda}|f_0(x)|\Bigr)$ だから，ある有限部分集合 $\Lambda_1\subset\Lambda$ が存在して

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_1}\Bigl(\sup_{x\in X_\lambda}|f_0(x)|\Bigr)>\|f_0\|_V-\frac{\delta}{2}$$

となる．このとき $\Lambda_2:=\Lambda\setminus\Lambda_1$ と置けば

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_2}\Bigl(\sup_{x\in X_\lambda}|f_0(x)|\Bigr)<\frac{\delta}{2}.$$

$n:=|\Lambda_1|$ として $\Lambda_1=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$ と書く．V の定義より $A:=\{x\in X_{\lambda_1}\cup\cdots\cup X_{\lambda_n}\mid |f(x)|\geq\frac{\delta}{2n}\}$ は有限集合となる．そこで $f\in V$ として

$$f(x):=\begin{cases}f_0(x) & (x\in A\text{ のとき})\\ 0 & (x\notin A\text{ のとき})\end{cases}$$

を取れば

$$
\begin{aligned}
\|f-f_0\|_V &= \sum_{\lambda\in\Lambda}\Bigl(\sup_{x\in X_\lambda}|f(x)-f_0(x)|\Bigr)\\
&= \sum_{\lambda\in\Lambda_1}\Bigl(\sup_{x\in X_\lambda}|f(x)-f_0(x)|\Bigr)+\sum_{\lambda\in\Lambda_2}\Bigl(\sup_{x\in X_\lambda}|f(x)-f_0(x)|\Bigr)\\
&= \sum_{\lambda\in\Lambda_1}\Bigl(\sup_{x\in X_\lambda\setminus A}|f_0(x)|\Bigr)+\sum_{\lambda\in\Lambda_2}\Bigl(\sup_{x\in X_\lambda}|f_0(x)|\Bigr)\\
&< \sum_{i=1}^{n}\frac{\delta}{2n}+\frac{\delta}{2}=\delta.
\end{aligned}
$$

更に

$$
\begin{aligned}
\varphi(g_\xi)(f) &= \sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{x\in X_\lambda} g_\xi(x)f(x)=\sum_{x\in A}g_\xi(x)f(x)=\sum_{x\in A}\xi(\chi_x)f(x)\\
&= \xi\Bigl(\sum_{x\in A}f(x)\chi_x\Bigr)=\xi(f)
\end{aligned}
$$

故に

$$
\begin{aligned}
|\varphi(g_\xi)(f_0)-\xi(f_0)| &\le |\varphi(g_\xi)(f_0)-\varphi(g_\xi)(f)|+|\xi(f)-\xi(f_0)|\\
&< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.
\end{aligned}
$$

$\varepsilon>0$ は任意だったから，(i)(ii) により $|\varphi(g_\xi)(f_0)-\xi(f_0)|=0$，即ち $\varphi(g_\xi)(f_0)=\xi(f_0)$ である．

$f_0\in V$ は任意だったから $\varphi(g_\xi)=\xi$ が分かる．故に $\varphi\colon W\longrightarrow V^*$ は全射である．以上より等長同型 $W\cong V^*$ が示された． □

参考文献

[1] F. F. Bonsall, Sublinear Functionals and Ideals in Partially Ordered Vector Spaces, Proc. London Math. Soc. (1954), 402–418, http://plms.oxfordjournals.org/content/s3-4/1.toc

[2] P. R. Andenaes, Hahn-Banach Extensions which are Maximal on a Given Cone, Math. Ann. 188, 90–96 (1970), http://www.springerlink.com/content/v4rj31746u357841/

[3] J. L. Bell and D. H. Fremlin, A Geometric Form of the Axiom of Choice, Fundamenta mathematicae, 77(1973), 167–170, `http://matwbn.icm.edu.pl/tresc.php?wyd=1&tom=77`

[4] J. Lembcke, Tow Extension Theorems Effectively Equivalent to the Axiom of Choice, Bull. London Math. Soc. 31 (1979), 285–288, `http://blms.oxfordjournals.org/content/11/3/285.full.pdf+html`

[5] H. Rubin and J. Rubin, Equivalents of the Axiom of Choice II, North Holland, 1985.