

関数解析学と選択公理

alg-d

<http://alg-d.com/math/ac/>

2013年10月26日

ZF では証明できない関数解析学の定理として Hahn-Banach の定理が有名である . Hahn-Banach の定理はある種の写像の延長の存在を保証する定理だが , 実は Hahn-Banach の定理に「延長に関する条件」を付け加えると , 選択公理と同値になることが知られている .

定義. V を実線型空間とする .

1. $S \subset V$ が凸集合
 \iff 任意の二点 $u, v \in S$ に対し $\{tu + (1-t)v \mid t \in [0, 1]\} \subset S$
2. $S \subset V$ を凸集合とする . $x \in S$ が extreme point
 \iff 任意の二点 $u, v \in S$ に対し $x \notin \{tu + (1-t)v \mid t \in (0, 1)\}$
3. $p: V \rightarrow \mathbb{R}$ が劣線型汎関数 (sublinear functional)
 \iff 任意の $v, w \in V$ と任意の実数 $\xi \geq 0$ に対し

$$p(v+w) \leq p(v) + p(w), \quad p(\xi v) = \xi p(v)$$

このとき $p(0) = p(0v) = 0p(v) = 0$ であり ,

$$0 = p(0) = p(v + (-v)) \leq p(v) + p(-v)$$

だから $-p(-v) \leq p(v)$ である .

定義. X を集合とし , $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ を部分関数とする (定義域を dom で表す) . $S \subset X$ を部分集合とするとき

$$f \leq_S g \iff S \subset \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g) \text{ かつ任意の } x \in S \text{ に対し } f(x) \leq g(x)$$

$$f =_S g \iff S \subset \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g) \text{ かつ任意の } x \in S \text{ に対し } f(x) = g(x)$$

と定義する . $f =_S g \iff f \leq_S g$ かつ $g \leq_S f$ である .

定義 . V を実線型空間 , $p, f: V \rightarrow \mathbb{R}$ を部分関数とする . 更に p は劣線型 , f は線型で , $f \leq_{\text{dom}(f)} p$ を満たすとする . このとき

$$Z(p, f) := \{g: \text{dom}(p) \rightarrow \mathbb{R} : \text{線型汎関数} \mid g =_{\text{dom}(f)} f, g \leq_{\text{dom}(p)} p\}$$

と書く . 明らかに $Z(p, f)$ は凸集合である .

命題 (Hahn-Banach の定理). 選択公理を仮定する . V を実線型空間 , $W \subset V$ を部分空間として , $p: V \rightarrow \mathbb{R}$ を劣線型汎関数とする . $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ を線型汎関数とし , $f \leq_W p$ を満たすとする . このとき $Z(p, f) \neq \emptyset$ である .

証明 . $A := \{\varphi: V \rightarrow \mathbb{R} : \text{部分線型汎関数} \mid W \subset \text{dom}(\varphi), \varphi \leq_{\text{dom}(\varphi)} p, \varphi =_W f\}$ と置き , A に順序を包含関係 \subset で定める . $C \subset A$ を全順序部分集合とすると , $\varphi := \bigcup_{\psi \in C} \psi \in A$ は明らかに C の上界である . 故に (A, \subset) に Zorn の補題を適用できて , 極大元 $\varphi \in A$ を得る . φ の極大性により $\text{dom}(\varphi) = V$ である . 故に $\varphi \in Z(p, f)$ である . □

Hahn-Banach の定理の証明は選択公理よりも真に弱い BPI (=Boolean Prime Ideal theorem) があれば可能である .

定理 1. 選択公理

$\iff V$ を実線型空間 , $W \subset V$ を部分空間 , $S \subset V$ を部分集合とする . $p: V \rightarrow \mathbb{R}$ を劣線型汎関数とし , 線型汎関数 $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ は $f \leq_W p$ を満たすとする . このとき前順序集合 $(Z(p, f), \leq_S)$ の極大元が存在する .

即ちある $g \in Z(p, f)$ が存在して , 任意の $h \in Z(p, f)$ に対し「 $g \leq_S h$ ならば $g =_S h$ 」が成り立つ .

証明 . (\implies) Hahn-Banach の定理により $Z(p, f) \neq \emptyset$ であるから , $S \subset W$ のときは明らか . $S \not\subset W$ とする . $\widetilde{W} \subset V$ を W と S で生成される部分空間とする .

$$A := \left\{ (M, \varphi) \mid \begin{array}{l} W \subset M \subset \widetilde{W} \text{ は部分空間} \\ M \text{ は } W \text{ と } M \cap S \text{ で生成される} \\ \varphi \text{ は } (Z(p|_M, f), \leq_{M \cap S}) \text{ の極大元} \end{array} \right\}$$

に順序関係 \leq を

$$(M, \varphi) \leq (N, \psi) \iff M \subset N, \varphi =_M \psi$$

で定める． $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ を全順序部分集合とする． $\varphi := \bigcup_{(N,\psi) \in \mathcal{C}} \psi$, $M := \text{dom}(\varphi)$ と定める．明らかに $\varphi \in Z(p|_M, f)$ である． $g \in Z(p|_M, f)$ が $\varphi \leq_{M \cap S} g$ を満たすとする．任意の $s \in M \cap S$ を取る． M の定義よりある $(N, \psi) \in \mathcal{C}$ が存在して $s \in N$ となる． $(N, \psi) \in \mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ だから, ψ は $(Z(p|_N, f), \leq_{N \cap S})$ の極大元． $g|_N \in Z(p|_N, f)$, $\psi \leq_{N \cap S} g$ だから, ψ の極大性により $\psi(s) = g(s)$ である．即ち $\varphi(s) = g(s)$, 従って $\varphi =_{M \cap S} g$ が分かり, $\varphi \in Z(p|_M, f)$ は極大元である．故に $(M, \varphi) \in \mathcal{A}$ ．よって明らかに (M, φ) は \mathcal{C} の上界である．そこで (\mathcal{A}, \leq) に Zorn の補題を適用して極大元 $(M, \varphi) \in \mathcal{A}$ を得る．極大性より $M = \widetilde{W}$ である．このとき Hahn-Banach の定理により $g \in Z(p, \varphi) \subset Z(p, f)$ を取れば, この g が $(Z(p, f), \leq_S)$ の極大元である．

(\Leftarrow) 選択公理と同値な AMC を示す．

AMC (= the Axiom of Multiple Choice) とは次の命題のこと．

非空集合の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対し, 有限集合の族 $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ で
任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $\emptyset \neq F_\lambda \subset X_\lambda$ となるものが存在する．

同値性の証明は the Axiom of Multiple Choice を参照．

$\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を互いに素な非空集合の族とする． $X := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ として

$$V := \{\varphi \in \mathbb{R}^X \mid \text{有限個の } \lambda \in \Lambda \text{ を除いて } \varphi(X_\lambda) = 0\}$$

と定める． V は実線型空間である． $A \subset X$ に対し χ_A で A の特性関数を表す．即ち

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & (x \in A \text{ のとき}) \\ 0 & (x \notin A \text{ のとき}) \end{cases} .$$

特に $x \in X$ に対し $\chi_x := \chi_{\{x\}}$ と書く． $S := \{\chi_x \mid x \in X\} \subset V$, $S_\lambda := \{\chi_x \mid x \in X_\lambda\} \subset V$ と定める． $v \in V$ に対し, $v^+(x) := \max\{v(x), 0\}$ と定義して

$$p(v) := \sum_{\lambda \in \Lambda} \sup_{x \in X_\lambda} v^+(x)$$

と定めると $p: V \rightarrow \mathbb{R}$ は劣線型汎関数である． $f := 0: 0 \rightarrow \mathbb{R}$ を線型汎関数として, 仮定を適用し極大元 $g \in (Z(p, f), \leq_S)$ を得る．このとき

$$\rho_\lambda := \frac{1}{2} \sup_{x \in X_\lambda} g(\chi_x)$$

$$F_\lambda := \{x \in X_\lambda \mid g(\chi_x) > \rho_\lambda\}$$

と定める．

$\lambda \in \Lambda$ を取り $F_\lambda = \emptyset$ と仮定する . $g =_{S_\lambda} 0$ である .

$\therefore \rho_\lambda > 0$ と仮定すると , \sup の性質によりある $x \in X_\lambda$ が存在して $g(\chi_x) > \rho_\lambda$ である . 故に $F_\lambda = \emptyset$ に矛盾する . 従って $\rho_\lambda \leq 0$ となる . 即ち $g \leq_{S_\lambda} 0$ である . p の定義より明らかに $0 \leq_V p$, 故に $0 \in Z(p, f)$ である . よって g の極大性により $g =_{S_\lambda} 0$ である .

$a \in X_\lambda$ を一つ取り , $h: V \rightarrow \mathbb{R}$ を $h(v) := g((1 - \chi_{X_\lambda})v) + v(a)$ で定める . 簡単のため $\chi = \chi_{X_\lambda}$ と書くと , p の定義により

$$p(v) = p((1 - \chi)v) + p(\chi v) \geq g((1 - \chi)v) + v^+(a) \geq h(v)$$

だから $h \in Z(p, f)$ である . しかし $x \in X$ に対し

$$h(\chi_x) = \begin{cases} \chi_x(a) & (x \in X_\lambda \text{ のとき}) \\ g(\chi_x) & (x \notin X_\lambda \text{ のとき}) \end{cases} = \begin{cases} 1 & (x = a \text{ のとき}) \\ 0 & (x \neq a \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるから $g \leq_S h$ かつ $g \neq_S h$ となり , g の極大性に矛盾する .

故に $F_\lambda \neq \emptyset$ である . また $\rho > 0$ である .

$|F_\lambda| = \infty$ と仮定する . 自然数 n を $n\rho > 1$ となるように決める . このとき F_λ から互いに異なる n 個の元 $a_1, \dots, a_n \in F_\lambda$ が取れる . すると

$$1 = p(\chi_{\{a_1, \dots, a_n\}}) \geq g(\chi_{\{a_1, \dots, a_n\}}) = g(\chi_{a_1}) + \dots + g(\chi_{a_n}) \geq n\rho > 1$$

となり矛盾する . 故に $|F_\lambda| < \infty$ となる .

以上より AMC が示された . □

定理 2. 以下の命題は (ZF 上) 同値

1. 選択公理
2. V を実線型空間 , $W \subset V$ を部分空間として , $p: V \rightarrow \mathbb{R}$ を劣線型汎関数とする . $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ を線型汎関数とし , $f \leq_W p$ を満たすとする . このとき $Z(p, f)$ は extreme point を持つ .
3. 「実ノルム空間の双対空間」の単位球体は extreme point を持つ .

証明. (1 \implies 2) 整列可能定理を使って $V \setminus W$ を整列し , 順序数 λ を使って $V \setminus W = \{v_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ と書く . $\alpha < \lambda$ に対し $(q_\alpha, K_\alpha, p_\alpha)$ を以下の性質を満たすように超限帰納法で定義する .

(a) $p_\alpha, q_\alpha: V \rightarrow \mathbb{R}$ は劣線型汎関数である .

(b) $f \leq_W p_\alpha$

(c) $p_\alpha(v) \geq -p_0(-v)$

(d) $\beta < \alpha$ のとき $p_\beta \geq_V p_\alpha$

(e) $K_\alpha = Z(p_\alpha, f)$

(i) $\alpha = 0$ のとき .

$$q_0 := p$$

$$K_0 := \{g \in Z(q_0, f) \mid g \text{ は } (Z(q_0, f), \leq_{\{v_0\}}) \text{ の極大元} \}$$

$$p_0(v) := \sup_{g \in K_0} g(v) \quad (v \in V)$$

と定める . この定義が可能なこと , またこれらが性質 (a) から (e) を満たすことを確認する . q_0 が劣線型であることは良い . 勿論 $f \leq_W q_0$ である . 故に定理 1 により $K_0 \neq \emptyset$ である . $g \in K_0 (\subset Z(q_0, f))$ のとき $g \leq_V q_0$ だから , 各 $v \in V$ について $\{g(v) \mid g \in K_0\}$ は上に有界である . 故に $p_0(v) = \sup_{g \in K_0} g(v)$ は定義され , 特に $p_0 \leq_V q_0$ となる . p_0, K_0 の定義から明らかに ,

$$\text{任意の } g \in K_0 \text{ に対し } g(v_0) = p_0(v_0) \quad (*)$$

となる . また , 任意の $v, w \in V$ と実数 $\xi \geq 0$ に対し

$$\begin{aligned} p_0(v+w) &= \sup_{g \in K_0} g(v+w) = \sup_{g \in K_0} (g(v) + g(w)) \\ &\leq \sup_{g \in K_0} g(v) + \sup_{g \in K_0} g(w) \\ &= p_0(v) + p_0(w) \\ p_0(\xi v) &= \sup_{g \in K_0} g(\xi v) = \sup_{g \in K_0} \xi g(v) \\ &= \xi p_0(v) \end{aligned}$$

だから , $p_0: V \rightarrow \mathbb{R}$ は劣線型汎関数である . 故に (c) $p_0(v) \geq -p_0(-v)$ が成り立つ . また p_0 の定義より $f \leq_W p_0$ だから $Z(p_0, f)$ を考えることができる . このとき (e) $K_0 = Z(p_0, f)$ が分かる .

∴) p_0 の定義より , 任意の $g \in K_0$ に対し $g \leq_V p_0$ だから , $K_0 \subset Z(p_0, f)$ は明らか . 逆を示すため , $g \in Z(p_0, f)$ を取る . $p_0 \leq_V q_0$ だったから $g \in Z(q_0, f)$ である . また (*) 「任意の $g \in K_0$ に対し $g(v_0) = p_0(v_0)$ 」 に気をつけると

$$-p_0(-v_0) = -\sup_{h \in K_0} h(-v_0) = \inf_{h \in K_0} h(v_0) = \inf_{h \in K_0} p_0(v_0) = p_0(v_0).$$

$g \leq_V p_0$ だから $g(v_0) \leq p_0(v_0)$ であり, かつ

$$g(v_0) = -g(-v_0) \geq -p_0(-v_0) = p_0(v_0).$$

故に $g(v_0) = p_0(v_0)$ となる. よって $g \in K_0$ が分かる.

以上より $\alpha = 0$ の時は (a) から (e) が成り立つことが分かった.

(ii) $0 < \alpha < \lambda$ のとき.

$$q_\alpha(v) := \inf_{\beta < \alpha} p_\beta(v) \quad (v \in V)$$

$$K_\alpha := \{g \in Z(q_\alpha, f) \mid g \text{ は } (Z(q_\alpha, f), \leq_{\{v_\alpha\}}) \text{ の極大元}\}$$

$$p_\alpha(v) := \sup_{g \in K_\alpha} g(v) \quad (v \in V)$$

と置く. この定義が可能なこと, またこれらが性質 (a) から (e) を満たすことを確認する. 帰納法の仮定 (c) より $\beta < \alpha$ に対し $p_\beta(v) \geq -p_0(-v)$ だから, $\{p_\beta(v) \mid \beta < \alpha\}$ は下に有界である. 故に $q_\alpha(v) = \inf_{\beta < \alpha} p_\beta(v)$ は定義される. 任意の $v, w \in V$ と実数 $\xi \geq 0$ に対し

$$\begin{aligned} q_\alpha(v+w) &= \inf_{\beta < \alpha} p_\beta(v+w) \\ &\leq \inf_{\beta < \alpha} (p_\beta(v) + p_\beta(w)) \quad (\text{帰納法の仮定 (a) による}) \\ &= \inf_{\beta < \alpha} p_\beta(v) + \inf_{\beta < \alpha} p_\beta(w) \quad (\text{帰納法の仮定 (d) による}) \\ &= q_\alpha(v) + q_\alpha(w). \\ q_\alpha(\xi v) &= \inf_{\beta < \alpha} p_\beta(\xi v) = \inf_{\beta < \alpha} \xi p_\beta(v) \quad (\text{帰納法の仮定 (a) による}) \\ &= \xi q_\alpha(v). \end{aligned}$$

即ち $q_\alpha: V \rightarrow \mathbb{R}$ は劣線型汎関数である. 帰納法の仮定 (b) により $q_\alpha(v) = \inf_{\beta < \alpha} p_\beta(v) \geq f(v)$ だから $f \leq_W q_\alpha$ である. 故に定理 1 により $K_\alpha \neq \emptyset$ である. $g \in K_\alpha (\subset Z(q_\alpha, f))$ のとき $g \leq q_\alpha$ だから, $\{g(v) \mid g \in K_\alpha\}$ は上に有界である. よって $p_\alpha(v) = \sup_{g \in K_\alpha} g(v)$ は定義され, 特に $p_\alpha \leq_V q_\alpha$ である. 従って $\beta < \alpha$ に対し $p_\alpha(v) \leq q_\alpha(v) = \inf_{\beta < \alpha} p_\beta(v) \leq p_\beta(v)$, 即ち (d) が成り立つ. 特に $p_\alpha(-v) \leq p_0(-v)$ であるから, $p_\alpha(v) \geq -p_\alpha(-v) \geq -p_0(-v)$, 即ち (c) が成り立つ. p_α, K_α の定義から明らかに

$$\text{任意の } g \in K_\alpha \text{ に対し } g(v_\alpha) = p_\alpha(v_\alpha) \quad (**)$$

となる．また，任意の $v, w \in V$ と実数 $\xi \geq 0$ に対し

$$\begin{aligned} p_\alpha(v+w) &= \sup_{g \in K_\alpha} g(v+w) \\ &= \sup_{g \in K_\alpha} (g(v) + g(w)) \\ &\leq \sup_{g \in K_\alpha} g(v) + \sup_{g \in K_\alpha} g(w) \\ &= p_\alpha(v) + p_\alpha(w). \\ p_\alpha(\xi v) &= \sup_{g \in K_\alpha} g(\xi v) = \sup_{g \in K_\alpha} \xi g(v) \\ &= \xi p_\alpha(v). \end{aligned}$$

従って $p_\alpha: V \rightarrow \mathbb{R}$ は劣線型汎関数である．また p_α の定義より $f \leq_W p_\alpha$ だから $Z(p_\alpha, f)$ を考えることができる．このとき (e) $K_\alpha = Z(p_\alpha, f)$ が成り立つ．

∴) p_α の定義より，任意の $g \in K_\alpha$ に対し $g \leq_V p_\alpha$ だから， $K_\alpha \subset Z(p_\alpha, f)$ は明らか．逆を示すため， $g \in Z(p_\alpha, f)$ を取る． $p_\alpha \leq_V q_\alpha$ だったから $g \in Z(q_\alpha, f)$ である．また (**) 「任意の $g \in K_\alpha$ に対し $g(v_\alpha) = p_\alpha(v_\alpha)$ 」に気をつけると

$$-p_\alpha(-v_\alpha) = -\sup_{h \in K_\alpha} h(-v_\alpha) = \inf_{h \in K_\alpha} h(v_\alpha) = \inf_{h \in K_\alpha} p_\alpha(v_\alpha) = p_\alpha(v_\alpha).$$

$g \leq_V p_\alpha$ だったから $g(v_\alpha) \leq p_\alpha(v_\alpha)$ であり，かつ

$$g(v_\alpha) = -g(-v_\alpha) \geq -p_\alpha(-v_\alpha) = p_\alpha(v_\alpha).$$

故に $g(v_\alpha) = p_\alpha(v_\alpha)$ でなければならない．よって $g \in K_\alpha$ が分かる．

以上により (a) から (e) が成り立つことが分かった．

さて， $v \in V$ に対し $q_\lambda(v) := \inf_{\alpha < \lambda} p_\alpha(v)$ と定める．明らかに， $\alpha < \lambda$ に対し $p_\alpha \geq_V p_\lambda$ である．性質 (b) により $f \leq_W q_\lambda$ であるから，Hahn-Banach の定理により $Z(q_\lambda, f) \neq \emptyset$ である． $0 < \alpha \leq \lambda$ とする．このとき $Z(q_\alpha, f) = \bigcap_{\beta < \alpha} K_\beta$ となる．

∴) 任意の $\beta < \alpha$ を取ると，定義より $q_\alpha \leq_V p_\beta$ だから $Z(q_\alpha, f) \subset Z(p_\beta, f) = K_\beta$ ．故に $Z(q_\alpha, f) \subset \bigcap_{\beta < \alpha} K_\beta$ である．

逆に $g \in \bigcap_{\beta < \alpha} K_\beta$ とする．任意の $\beta < \alpha$ に対し $g \in K_\beta = Z(p_\beta, f)$ だから $g \leq_V p_\beta$ である．よって $g(v) \leq \inf_{\beta < \alpha} p_\beta(v) = q_\alpha(v)$ となり， $g \in Z(q_\alpha, f)$ である．

$\varphi, \psi \in Z(q_\lambda, f)$ とする . $\alpha < \lambda$ とすると $\varphi, \psi \in K_\alpha$ だから $\varphi(v_\alpha) = p_\alpha(v_\alpha) = \psi(v_\alpha)$ である . 故に $\varphi =_V \psi$ である . 即ち $Z(q_\lambda, f) = \{\varphi\}$ と書ける . この φ が extreme point である .

∴) ある $g, h \in Z(p, f)$, $g, h \neq \varphi$ と $0 < t < 1$ を使って $\varphi = tg + (1-t)h$ と書けたと仮定する . $\Gamma := \{\alpha < \lambda \mid g \notin K_\alpha \text{ または } h \notin K_\alpha\}$ と置く . 「全ての $\alpha < \lambda$ について $g \in K_\alpha$ 」だとすると $\varphi = g$ となるから , $\Gamma \neq \emptyset$ である . そこで $\gamma := \min \Gamma$ が定まる . $\varphi \in K_0$ だから $p_0(v_0) = \varphi(v_0) = tg(v_0) + (1-t)h(v_0)$ となる . $g(v_0), h(v_0) \leq p_0(v_0)$ であるから , $g(v_0) = h(v_0) = p_0(v_0)$ でなければならない . 故に $g, h \in K_0$ だから , $\gamma > 0$ である . $g, h \in \bigcap_{\alpha < \gamma} K_\alpha = Z(q_\gamma, f)$ だから $g, h \leq q_\gamma$ となる . 「 $g \notin K_\gamma$ または $h \notin K_\gamma$ 」だから , 「 $g(v_\gamma) < p_\gamma(v_\gamma)$ または $h(v_\gamma) < p_\gamma(v_\gamma)$ 」である . どちらにしても $\varphi(v_\gamma) = tg(v_\gamma) + (1-t)h(v_\gamma) < p_\gamma(v_\gamma)$ となり , $\varphi \in K_\gamma$ に矛盾する .

(2 \implies 3) $(V, \|\cdot\|_V)$ を実ノルム空間とする . $\|\cdot\|_V: V \rightarrow \mathbb{R}$ は劣線型写像である . そこで $W := 0, f := 0: 0 \rightarrow \mathbb{R}$ として仮定 2 を使えば $Z(\|\cdot\|_V, f) \subset V^*$ は extreme point を持つ . $S \subset V^*$ を単位球体とする . 即ち $S := \{g \in V^* \mid \|g\|_{V^*} \leq 1\}$ であるが , $\|g\|_{V^*} \leq 1 \iff |g(\cdot)| \leq_V \|\cdot\|_V$ である . 故に $Z(\|\cdot\|_V, f) = S$ となり , S は extreme point を持つ .

(3 \implies 1) $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を非空集合の族とする . X_λ は互いに素としてよい . $X := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ として

$$V := \left\{ f \in \mathbb{R}^X \mid \begin{array}{l} \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対し } \{x \in X \mid |f(x)| > \varepsilon\} \text{ は有限集合,} \\ \sum_{\lambda \in \Lambda} \left(\sup_{x \in X_\lambda} |f(x)| \right) < \infty \end{array} \right\}$$

$$W := \left\{ g \in \mathbb{R}^X \mid \sup_{\lambda \in \Lambda} \left(\sum_{x \in X_\lambda} |g(x)| \right) < \infty \right\}$$

と定める . これらは次のノルムでノルム空間になる .

$$\|f\|_V := \sum_{\lambda \in \Lambda} \left(\sup_{x \in X_\lambda} |f(x)| \right)$$

$$\|g\|_W := \sup_{\lambda \in \Lambda} \left(\sum_{x \in X_\lambda} |g(x)| \right)$$

$S := \{g \in W \mid \|g\|_W \leq 1\} \subset W$ を単位球体とする . $V^* := \{\xi: V \rightarrow \mathbb{R} : \text{有界線型}\}$ を V の双対空間とすると , 後で述べる補題 1 により等長同型 $W \cong V^*$ が成り立つ . これにより S を V^* 内の単位球体とみなす . 仮定より S は extreme point $e \in S$ を持つ . 任意の $\lambda \in \Lambda$ を取る . $e(x) \neq 0$ となる $x \in X_\lambda$ が一意に存在する .

∴) まず存在を示す．その為に，全ての $x \in X_\lambda$ について $e(x) = 0$ であると仮定する． $u \in X_\lambda$ を一つ取り， $x \in X$ に対し

$$f(x) := \begin{cases} 1 & (x = u \text{ のとき}) \\ e(x) & (x \neq u \text{ のとき}) \end{cases}, \quad g(x) := \begin{cases} -1 & (x = u \text{ のとき}) \\ e(x) & (x \neq u \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定めると $f, g \in S$ であり，これらは $f \neq e, g \neq e, e = \frac{f+g}{2}$ を満たす．即ち e が extreme point であることに矛盾する．故に $e(x) \neq 0$ となる $x \in X_\lambda$ は存在する．

次に一意性を示す．その為に， $u, v \in X_\lambda, u \neq v$ が $e(u), e(v) \neq 0$ を満たすと仮定する．

$$f(x) := \begin{cases} e(u)(1 + |e(v)|) & (x = u \text{ のとき}) \\ e(v)(1 - |e(u)|) & (x = v \text{ のとき}) \\ e(x) & (x \neq u, v \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$g(x) := \begin{cases} e(u)(1 - |e(v)|) & (x = u \text{ のとき}) \\ e(v)(1 + |e(u)|) & (x = v \text{ のとき}) \\ e(x) & (x \neq u, v \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定めると $f, g \in S$ であり，これらは $f \neq e, g \neq e, e = \frac{f+g}{2}$ を満たす．即ち e が extreme point であることに矛盾する．故に $e(x) \neq 0$ となる $x \in X_\lambda$ は一意的である．

そこで $F: \Lambda \rightarrow X = \bigcup X_\lambda$ を $F(\lambda) := (e(x) \neq 0 \text{ となる } x \in X_\lambda)$ で定めれば F が選択関数となる． □

さて，関数解析において次のような定理がある．

命題 (Banach-Alaoglu の定理). ノルム空間 X の双対空間 X^* の閉単位球体 $B \subset X^*$ は弱*位相でコンパクトである．

命題 (Krein-Milman の定理). 局所凸位相線型空間のコンパクト凸集合は extreme point を持つ．

定理 3. 選択公理 \iff Banach-Alaoglu の定理 + Krein-Milman の定理

証明. (\implies) 略

(\impliedby) 定理 2 の条件 3 を示す． X を実ノルム空間とする． X^* は局所凸位相線型空間で，単位球体 $B \subset X^*$ は凸集合である．Banach-Alaoglu により $B \subset X^*$ はコンパクト

である．故に Klein-Milman の定理により B は extreme point を持つ．

□

補題 1. 等長同型 $W \cong V^*$ が成り立つ．

証明. $f \in V, g \in W$ に対し

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in \Lambda} \left(\sum_{x \in X_\lambda} |g(x)| |f(x)| \right) &\leq \sum_{\lambda \in \Lambda} \left(\left(\sup_{y \in X_\lambda} |f(y)| \right) \sum_{x \in X_\lambda} |g(x)| \right) \\ &\leq \left(\sup_{\lambda \in \Lambda} \sum_{x \in X_\lambda} |g(x)| \right) \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \sup_{y \in X_\lambda} |f(y)| \right) \\ &\leq \|g\|_W \|f\|_V \end{aligned}$$

故に $\sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{x \in X_\lambda} g(x)f(x)$ は絶対収束する．そこで

$$\varphi(g)(f) := \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{x \in X_\lambda} g(x)f(x)$$

と定義する． $\varphi(g) : f \mapsto \varphi(g)(f)$ は V^* の元である．故に線型写像 $\varphi : W \rightarrow V^*$ が得られる．また $\|\varphi(g)\|_{V^*} \leq \|g\|_W$ も分かる．

任意の $\varepsilon > 0$ を取る． $\|g\|_W$ の定義と \sup の性質により，ある $\mu \in \Lambda$ が存在して $\sum_{x \in X_\mu} |g(x)| > \|g\|_W - \frac{\varepsilon}{2}$ となる．更に，ある有限部分集合 $A \subset X_\mu$ が存在して $\sum_{x \in A} |g(x)| > \sum_{x \in X_\mu} |g(x)| - \frac{\varepsilon}{2}$ とできる．そこで $h \in V$ を

$$h(x) := \begin{cases} 1 & (x \in A \text{ かつ } g(x) > 0 \text{ のとき}) \\ -1 & (x \in A \text{ かつ } g(x) < 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

で定義すれば $\|h\|_V = 1$ であり，

$$\begin{aligned} \|\varphi(g)\|_{V^*} &= \sup_{0 \neq f \in V} \frac{|\varphi(g)(f)|}{\|f\|_V} \\ &\geq \frac{|\varphi(g)(h)|}{\|h\|_V} \\ &= \sum_{x \in A} |g(x)| \\ &> \|g\|_W - \varepsilon. \end{aligned}$$

故に $\|\varphi(g)\|_{V^*} > \|g\|_W - \varepsilon$ となる． $\varepsilon > 0$ は任意だったから， $\|\varphi(g)\|_{V^*} \geq \|g\|_W$ が分かる．即ち $\|\varphi(g)\|_{V^*} = \|g\|_W$ であり， φ は等長写像である．

任意の $\xi \in V^*$ を取る . $x \in X$ に対し $\chi_x := \chi_{\{x\}} \in V$ を特性関数として $g_\xi(x) := \xi(\chi_x)$ と置く . $g_\xi \in W$ である .

$\therefore g_\xi \notin W$ と仮定する . $g_\xi \in \mathbb{R}^X$ だから

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \left(\sum_{x \in X_\lambda} |g(x)| \right) = \infty$$

でなければならない . つまりある $\mu \in \Lambda$ が存在して $\sum_{x \in X_\mu} |g(x)| > \|\xi\|_{V^*} + 1$ となる . 更に , ある有限部分集合 $A \subset X_\mu$ が存在して $\sum_{x \in A} |g(x)| > \|\xi\|_{V^*}$ とできる .
そこで $h \in V$ を

$$h(x) := \begin{cases} 1 & (x \in A \text{ かつ } g(x) > 0 \text{ のとき}) \\ -1 & (x \in A \text{ かつ } g(x) < 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

で定義すれば $\|h\|_V = 1$ であり ,

$$|\xi(h)| = \left| \xi \left(\sum_{x \in A} h(x) \chi_x \right) \right| = \left| \sum_{x \in A} h(x) \xi(\chi_x) \right| = \sum_{x \in A} |g_\xi(x)| > \|\xi\|_{V^*} .$$

故に

$$\|\xi\|_{V^*} = \sup_{0 \neq f \in V} \frac{|\xi(f)|}{\|f\|_V} \geq \frac{|\xi(h)|}{\|h\|_V} > \|\xi\|_{V^*}$$

となり矛盾する .

任意の $f_0 \in V$ を取る .

任意の $\varepsilon > 0$ を取ると , $\varphi(g), \xi \in V^*$ は有界 , 即ち連続だから , ある $\delta > 0$ が存在して
任意の $f \in V$ に対し

$$\|f - f_0\|_V < \delta \implies |\varphi(g)(f) - \varphi(g)(f_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, |\xi(f) - \xi(f_0)| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

(i) $n := |\{\lambda \in \Lambda \mid \exists x \in X_\lambda (f_0(x) \neq 0)\}| < \infty$ のとき .

$\{\lambda \in \Lambda \mid \exists x \in X_\lambda (f_0(x) \neq 0)\} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ と書く . V の定義より $A := \{x \in X \mid |f(x)| \geq \frac{\delta}{n}\}$ は有限集合となる . そこで $f \in V$ として

$$f(x) := \begin{cases} f_0(x) & (x \in A \text{ のとき}) \\ 0 & (x \notin A \text{ のとき}) \end{cases}$$

を取れば

$$\begin{aligned}\|f - f_0\|_V &= \sum_{\lambda \in \Lambda} \left(\sup_{x \in X_\lambda} |f(x) - f_0(x)| \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sup_{x \in X_{\lambda_i} \setminus A} |f_0(x)| \right) \\ &< \sum_{i=1}^n \frac{\delta}{n} = \delta.\end{aligned}$$

更に

$$\begin{aligned}\varphi(g_\xi)(f) &= \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{x \in X_\lambda} g_\xi(x) f(x) = \sum_{x \in A} g_\xi(x) f(x) = \sum_{x \in A} \xi(\chi_x) f(x) \\ &= \xi \left(\sum_{x \in A} f(x) \chi_x \right) = \xi(f)\end{aligned}$$

故に

$$\begin{aligned}|\varphi(g_\xi)(f_0) - \xi(f_0)| &\leq |\varphi(g_\xi)(f_0) - \varphi(g_\xi)(f)| + |\xi(f) - \xi(f_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

(ii) $|\{\lambda \in \Lambda \mid \exists x \in X_\lambda (f_0(x) \neq 0)\}| = \infty$ のとき .

$\|f_0\|_V = \sum_{\lambda \in \Lambda} \left(\sup_{x \in X_\lambda} |f_0(x)| \right)$ だから , ある有限部分集合 $\Lambda_1 \subset \Lambda$ が存在して

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_1} \left(\sup_{x \in X_\lambda} |f_0(x)| \right) > \|f_0\|_V - \frac{\delta}{2}$$

となる . このとき $\Lambda_2 := \Lambda \setminus \Lambda_1$ と置けば

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_2} \left(\sup_{x \in X_\lambda} |f_0(x)| \right) < \frac{\delta}{2}.$$

$n := |\Lambda_1|$ として $\Lambda_1 = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ と書く . V の定義より $A := \{x \in X_{\lambda_1} \cup \dots \cup X_{\lambda_n} \mid |f(x)| \geq \frac{\delta}{2n}\}$ は有限集合となる . そこで $f \in V$ として

$$f(x) := \begin{cases} f_0(x) & (x \in A \text{ のとき}) \\ 0 & (x \notin A \text{ のとき}) \end{cases}$$

を取れば

$$\begin{aligned}\|f - f_0\|_V &= \sum_{\lambda \in \Lambda} \left(\sup_{x \in X_\lambda} |f(x) - f_0(x)| \right) \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda_1} \left(\sup_{x \in X_\lambda} |f(x) - f_0(x)| \right) + \sum_{\lambda \in \Lambda_2} \left(\sup_{x \in X_\lambda} |f(x) - f_0(x)| \right) \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda_1} \left(\sup_{x \in X_\lambda \setminus A} |f_0(x)| \right) + \sum_{\lambda \in \Lambda_2} \left(\sup_{x \in X_\lambda} |f_0(x)| \right) \\ &< \sum_{i=1}^n \frac{\delta}{2n} + \frac{\delta}{2} = \delta.\end{aligned}$$

更に

$$\begin{aligned}\varphi(g_\xi)(f) &= \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{x \in X_\lambda} g_\xi(x) f(x) = \sum_{x \in A} g_\xi(x) f(x) = \sum_{x \in A} \xi(\chi_x) f(x) \\ &= \xi \left(\sum_{x \in A} f(x) \chi_x \right) = \xi(f)\end{aligned}$$

故に

$$\begin{aligned}|\varphi(g_\xi)(f_0) - \xi(f_0)| &\leq |\varphi(g_\xi)(f_0) - \varphi(g_\xi)(f)| + |\xi(f) - \xi(f_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ は任意だったから, (i)(ii) により $|\varphi(g_\xi)(f_0) - \xi(f_0)| = 0$, 即ち $\varphi(g_\xi)(f_0) = \xi(f_0)$ である.

$f_0 \in V$ は任意だったから $\varphi(g_\xi) = \xi$ が分かる. 故に $\varphi: W \rightarrow V^*$ は全射である. 以上より等長同型 $W \cong V^*$ が示された. \square

参考文献

- [1] F. F. Bonsall, Sublinear Functionals and Ideals in Partially Ordered Vector Spaces, Proc. London Math. Soc. (1954), 402–418, <http://plms.oxfordjournals.org/content/s3-4/1.toc>
- [2] P. R. Andenaes, Hahn-Banach Extensions which are Maximal on a Given Cone, Math. Ann. 188, 90–96 (1970), <http://www.springerlink.com/content/v4rj31746u357841/>

- [3] J. L. Bell and D. H. Fremlin, A Geometric Form of the Axiom of Choice, *Fundamenta mathematicae*, 77(1973), 167–170, <http://matwbn.icm.edu.pl/tresc.php?wyd=1&tom=77>
- [4] J. Lembcke, Tow Extension Theorems Effectively Equivalent to the Axiom of Choice, *Bull. London Math. Soc.* 31 (1979), 285–288, <http://blms.oxfordjournals.org/content/11/3/285.full.pdf+html>
- [5] H. Rubin and J. Rubin, *Equivalents of the Axiom of Choice II*, North Holland, 1985.