位相の拡大と選択公理

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2016 年 1 月 4 日

定義. X を位相空間とする.

1. X が $\mathrm{T}_3 \iff$ 閉集合 $F \subset X$ と $x \in X \setminus F$ に対して，開集合 $U, V \subset X$ が存在して $x \in U$，$F \subset V$，$U \cap V = \emptyset$ とできる.
2. X が $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}} \iff$ 閉集合 $F \subset X$ と $x \in X \setminus F$ に対して，連続関数 $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ が存在して「$f(x) = 0$ かつ任意の $y \in F$ に対して $f(y) = 1$」とできる.
3. X が Tychonoff $\iff X$ が T_1 かつ $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$.
4. X に同値関係 $\sim$ を $x \sim y \iff \overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ で定義する．商空間 $X/{\sim}$ を X の T_0-reflection という.
5. X が $\mathrm{R}_1 \iff X$ の T_0-reflection が Hausdorff.
6. $x \in X$ の開近傍系を $\mathcal{O}_x$ として $A_x := \displaystyle\bigcap_{U \in \mathcal{O}_x} U$ と書くことにする.

定義. 命題 (R)，(RT)，(CRT)，(CCRT) を以下のように定める.

(R) $\iff X$ の任意のコンパクト R_1 位相 $\mathcal{R}$ に対して，X のコンパクト Hausdorff 位相 $\mathcal{T} \supset \mathcal{R}$ が存在する.

(RT) $\iff X$ の任意のコンパクト R_1 位相 $\mathcal{R}$ に対して，X のコンパクト Tychonoff 位相 $\mathcal{T} \supset \mathcal{R}$ が存在する.

(CRT) $\iff X$ の任意のコンパクト T_3 位相 $\mathcal{R}$ に対して，X のコンパクト Tychonoff 位相 $\mathcal{T} \supset \mathcal{R}$ が存在する.

(CCRT) $\iff X$ の任意のコンパクト $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$ 位相 $\mathcal{R}$ に対して，X のコンパクト Tychonoff 位相 $\mathcal{T} \supset \mathcal{R}$ が存在する.

命題 1. $\overline{\{x\}} \subset \overline{\{y\}} \Longrightarrow A_x \supset A_y$．特に $x \sim y \Longrightarrow A_x = A_y$.

証明. $\overline{\{x\}} \subset \overline{\{y\}}$ とすると $x \in \overline{\{y\}}$ である．故に $U \in \mathcal{O}_x$ とすれば $y \in U$ でなければならない．従って $\mathcal{O}_x \subset \mathcal{O}_y$，即ち $A_x \supset A_y$ である． □

命題 2. X を R_1 空間，$x, y \in X$ とする．$x \in U,\ y \notin U$ なる開集合 $U \subset X$ が存在するならば，ある開集合 $V, W \subset X$ が存在して $x \in V,\ y \in W,\ V \cap W = \emptyset$ となる．

証明. 開集合 U が $x \in U,\ y \notin U$ を満たすとする．$X \backslash U$ は閉集合で $x \notin X \backslash U,\ y \in X \backslash U$ となるから $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ である．従って，$X/{\sim}$ を X の T_0-reflection として $[\cdot]$ で同値類を表せば $[x] \neq [y]$ となる．X が R_1 だから $X/{\sim}$ は Hausdorff であり，よって開集合 $V', W' \subset X/{\sim}$ が存在して $[x] \in V',\ [y] \in W',\ V' \cap W' = \emptyset$ とできる．$\pi\colon X \longrightarrow X/{\sim}$ を標準全射として $V := \pi^{-1}(V'),\ W := \pi^{-1}(W')$ とすれば $x \in V,\ y \in W,\ V \cap W = \emptyset$ である． □

命題 3. X を R_1 空間とすれば $x \not\sim y$ ならば $A_x \cap A_y = \emptyset$ である．

証明. 命題 2 より明らか． □

命題 4. T_3 空間は R_1 空間である．

証明. X を T_3 空間，$X/{\sim}$ を T_0-reflection とする．異なる 2 点 $[x], [y] \in X/{\sim}$ を取る．$x \not\sim y$ だから，開集合 $U \subset X$ で $x \in U$，$y \notin U$ となるものが取れるとしてよい．$F := X \setminus U$ とすれば $x \notin F$，$y \in F$ である．今 X が T_3 だから，ある開集合 $V, W \subset X$ が存在して $x \in V$，$F \subset W$，$V \cap W = \emptyset$ となる．$\pi\colon X \longrightarrow X/{\sim}$ を標準全射として $\bar{V} := \pi(V)$，$\bar{W} := \pi(W)$ とすれば，$\bar{V}, \bar{W} \subset X/{\sim}$ は開集合で $[x] \in \bar{V}$，$[y] \in \bar{W}$，$\bar{V} \cap \bar{W} = \emptyset$ である．故に $X/{\sim}$ は Hausdorff 空間だから，X は R_1 空間であることがわかる． □

命題 5. コンパクト R_1 空間は T_3 空間である．

証明. $(X, \mathcal{O})$ をコンパクト R_1，$F \subset X$ を閉集合，$x \in X \setminus F$ とする．$\mathcal{U} := \{\langle U, V\rangle \in \mathcal{O}^2 \mid x \in U,\ U \cap V = \emptyset\}$ と置く．命題 2 により $\{V \mid \langle U, V\rangle \in \mathcal{U}\}$ は F の開被覆である．X のコンパクト性により閉集合 F もコンパクトだから，ある $\langle U_1, V_1\rangle, \ldots, \langle U_n, V_n\rangle \in \mathcal{U}$ が存在して $F \subset V_1 \cup \cdots \cup V_n$ と書ける．このとき $U := U_1 \cap \cdots \cap U_n$，$V := V_1 \cap \cdots \cap V_n$ も開集合で $x \in U$，$F \subset V$，$U \cap V = \emptyset$ である． □

命題 6. 選択公理 $\Longrightarrow$ (R)

証明. $(X, \mathcal{R})$ をコンパクト R_1 位相空間とする．$\mathcal{A} := \{A_x \mid x \in X\}$ と置く．命題 3

より集合 $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ は互いに素な集合の族であるから，選択公理により $\mathcal{A}$ の選択集合 $C \subset X$ が存在する．$B := X \setminus C$ として

$$\mathcal{S} := \{V \setminus Q \mid V \in \mathcal{R},\ Q \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(B)\}$$

と定める．$\mathcal{B} := \mathcal{S} \cup \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(B)$ として，$\mathcal{B}$ で生成される X の位相を $\mathcal{T}$ とする．$\mathcal{T} \supset \mathcal{R}$ である．$(X, \mathcal{T})$ は Hausdorff 空間である．

∵) $x, y \in X,\ x \neq y$ とする．$x, y \in C$ とすれば C の取り方により $U \in \mathcal{R}$ で $x \in U,\ y \notin U$ となるものが存在する．従って補題 2 からある開集合 $V, W \in \mathcal{R} \subset \mathcal{T}$ が存在して $x \in V,\ y \in W,\ V \cap W = \emptyset$ となる．

$x \notin C$ とすると $x \in B$ だから $\{x\} \in \mathcal{T},\ X \setminus \{x\} \in \mathcal{T}$ となりよい．$y \notin C$ のときも同様.

$(X, \mathcal{T})$ がコンパクトであることを示すには「X の開被覆 $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ に対してある $U_0, \cdots, U_n \in \mathcal{U}$ が存在して $X = U_0 \cup \cdots \cup U_n$」を示せばよい.

そこで $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ を X の開被覆とする．

$$\mathcal{V} := \{V \in \mathcal{R} \mid \text{ある } Q \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(B) \text{ が存在して } V \setminus Q \in \mathcal{U}\}$$

とする．任意の $x \in X$ に対してある $V \in \mathcal{V}$ が存在して $x \in V$ となる．

∵) $x \in X$ とする．C の取り方から，ある $c \in C$ が存在して $x \in A_c$ となる．$\mathcal{U}$ が X の開被覆だから，ある $U \in \mathcal{U}$ が存在して $c \in U$ となる．$\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ だから $U \in \mathcal{B} = \mathcal{S} \cup \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(B)$ であるが，今 $c \in C = X \setminus B$ であるから $U \notin \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(B)$，即ち $U \in \mathcal{S}$ でなければならない．従ってある $V \in \mathcal{R}$ と $Q \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(B)$ が存在して $U = V \setminus Q$ と書ける．よって $c \in U \subset V \in \mathcal{V}$ である．このとき $x \in A_c \subset V$ となる．

即ち $\mathcal{V} \subset \mathcal{R}$ は X の開被覆だから $(X, \mathcal{R})$ のコンパクト性によりある $V_1, \cdots, V_n \in \mathcal{V}$ が存在して $X = V_1 \cup \cdots \cup V_n$ と書ける．$\mathcal{V}$ の定義より，各 $1 \leq i \leq n$ に対してある $Q_i \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(B)$ が存在して $U_i := V_i \setminus Q_i \in \mathcal{U}$ となる．$Q := Q_1 \cup \cdots \cup Q_n$ は有限集合である．$\mathcal{U}$ が X の開被覆だから，各 $q \in Q$ に対して $q \in U_q \in \mathcal{U}$ となる $U_q \in \mathcal{U}$ が取れる．このとき $X = \displaystyle\bigcup_{i=0}^{n} U_i \cup \bigcup_{q \in Q} U_q$ である． □

※ 逆 (R) $\Longrightarrow$ 選択公理が ZF で証明できるかどうかは未解決問題とのこと.

定理. 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 選択公理
2. (RT)
3. (CRT)
4. (CCRT)

証明. ($1 \Longrightarrow 2$) 選択公理 $\Longrightarrow$ (R) と，選択公理の下で「コンパクト Hausdorff ならば Tychonoff」であることから明らか.

($2 \Longrightarrow 3$) T_3 ならば R_1 (命題 4) より明らか.

($3 \Longrightarrow 4$) 明らか.

($4 \Longrightarrow 1$) W を非可算整列順序集合，$\mathbf{2} := \{0,1\}$ を離散位相空間として直積空間 $A := \mathbf{2}^W$ を考える．A はコンパクトかつ $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$ である.

※ W の整列性により，選択公理を使わずにコンパクト性が言える.

$1 \in A$ を定数関数として $B := A \setminus \{1\}$ と置く．B は $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$ である.

B の任意の Tychonoff コンパクト化は A と同相であることが分かる.

$\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を互いに素な非空集合の族とする．$Y_\lambda := X_\lambda \sqcup B$ とする．B の位相を $\mathcal{O}_B$ として，Y_λ の位相 $\mathcal{O}_\lambda$ を

$$\mathcal{O}_B \cup \{O \subset Y_\lambda \mid Y_\lambda \setminus O \text{ は } B \text{ のコンパクト部分集合 }\}$$

で生成される位相とする.

このとき各 $(Y_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)$ は $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$ であることが分かる.

$Y := \displaystyle\coprod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$ を直和空間として $(Z, \mathcal{O}_Z)$ を Y の一点コンパクト化とする．Z はコンパクト $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$ である．故に (CCRT) により，Z のコンパクト Tychonoff 位相 $\mathcal{T} \supset \mathcal{O}_Z$ が存在する．このとき部分位相 $(Y_\lambda, \mathcal{T}|_{Y_\lambda})$ はコンパクト Tychonoff で，$B \subset (Y_\lambda, \mathcal{T}|_{Y_\lambda})$ の閉包 B_λ は B の Tychonoff コンパクト化である．故にこれは A と同相で，特に $B_\lambda \setminus B = \{x_\lambda\}$ $(x_\lambda \in X_\lambda)$ となる．これにより $(x_\lambda) \in \displaystyle\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ である. □

命題 7. $(X, \mathcal{O}_X)$ を Hausdorff 空間とする．Y を集合，$f\colon Y \longrightarrow X$ を全射として Y の位相 $\mathcal{O}_Y$ を f により誘導されるものとすれば $(Y, \mathcal{O}_Y)$ は R_1 である.

証明. Y の同値関係を $y \sim_f y' \Longleftrightarrow f(y) = f(y')$ で定めれば $\sim = \sim_f$ である.

$\because$) $y \not\sim_f y'$ とする．X が Hausdorff だから $U \in \mathcal{O}_X$ で $f(y) \in U,\ f(y') \notin U$ となるものが存在する．このとき $y \in f^{-1}(U),\ y' \notin f^{-1}(U)$ で $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_Y$ だから

$y \not\sim y'$ である．

　$y \not\sim y'$ とする．$V \in \mathcal{O}_Y$ で $y \in V,\ y' \notin V$ となるものが存在するとしてよい．$U \in \mathcal{O}_X$ を $V = f^{-1}(U)$ となるように取れば $f(y) \in U,\ f(y') \notin U$ だから $y \not\sim_f y'$ となる．

故に $(Y, \mathcal{O}_Y)$ の T_0-reflection は $Y/{\sim} \cong X$ であり，Hausdorff である． □

命題 8. (R) $\Longrightarrow$ 非空有限集合の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は選択関数を持つ．

証明. $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を非空有限集合の族とする．$\mathbb{R} \cap \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = \emptyset$ としてよい．$\mathcal{T}$ を区間 $[0,1)$ の通常の位相として，$Y_\lambda := [0,1) \cup X_\lambda$ に $\mathcal{T} \cup \{(x,1) \cup X_\lambda \mid 0 < x < 1\}$ で生成される位相 $\mathcal{R}_\lambda$ を入れる．$(Y_\lambda, \mathcal{R}_\lambda)$ は明らかにコンパクト R_1 空間である．

　直和 $Y := \coprod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ の，Alexandroff 一点コンパクト化 $(\bar{Y}, \mathcal{R})$ を考える．$(\bar{Y}, \mathcal{R})$ は明らかにコンパクト R_1 空間である．故に (R) により $\bar{Y}$ のコンパクト Hausdorff 位相 $\mathcal{O} \supset \mathcal{R}$ が存在する．$(Y_\lambda, \mathcal{O}|_{Y_\lambda})$ はコンパクト Hausdorff 空間である．

　部分空間 $I := [0,1) \subset (Y_\lambda, \mathcal{O}|_{Y_\lambda})$ の位相は通常の位相と一致する．

$\because$) $J := [0,1)$ を通常の位相が入った空間とすれば $\mathcal{T} \subset \mathcal{R}_\lambda \subset \mathcal{O}$ だったから $\mathrm{id}\colon I \longrightarrow J$ は連続全単射である．これは明らかに開写像だから id は同相，よって I の位相は通常の位相と一致する．

　A_λ を $[0,1) \subset (Y_\lambda, \mathcal{O}|_{Y_\lambda})$ の閉包として $B_\lambda := A_\lambda \cap X_\lambda$ とする．$[0,1) \subset Y_\lambda$ はコンパクトでないから閉でない．故に $B_\lambda \neq \emptyset$ となる．$\lambda \in \Lambda$ に対して $|B_\lambda| = 1$ である．

$\because$) $b \in B_\lambda$ を一つ取り $C := B_\lambda \setminus \{b\}$ と置く．$A_\lambda \subset Y_\lambda$ は閉集合だから $(A_\lambda, \mathcal{O}|_{A_\lambda})$ はコンパクト Hausdorff，即ち正則である．従ってある開集合 $U, V \in \mathcal{O}|_{A_\lambda}$ が存在して $b \in U,\ C \subset V,\ U \cap V = \emptyset$ とできる．このとき $\{U, V\} \cup \{[0,x) \mid 0 < x < 1\}$ は $A_\lambda = [0,1) \cup B_\lambda$ の開被覆であるから，A_λ のコンパクト性によりある $0 < x < 1$ を使って $A_\lambda = U \cup V \cup [0,x)$ と書ける．このとき $([x,1) \cap U) \sqcup ([x,1) \cap V) = [x,1)$ となるから $[x,1)$ の連結性より $[x,1) \cap U = \emptyset$ または $[x,1) \cap V = \emptyset$ とならなければならない．A_λ の定義から，その為には $U = \emptyset$ または $V = \emptyset$ でなければならない．今 $b \in U$ だから $V = \emptyset$ であり，$C \subset V$ だから $C = \emptyset$，よって $B_\lambda = \{b\}$ となる．

　よって $B_\lambda := \{b_\lambda\}$ とすれば $(b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ である． □

定理. (R) に次の命題を加えると選択公理と (ZF 上) 同値になる.

1. $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ は整列可能.
2. $\mathbb{R}$ は整列可能.
3. $\mathbb{N}$ の非単項超フィルターが存在する.
4. ある無限集合 A と A の非単項超フィルターが存在する.

証明. 選択公理 $\Longrightarrow 1$, $1 \Longrightarrow 2$, $2 \Longrightarrow 3$, $3 \Longrightarrow 4$ と「4 かつ (R) $\Longrightarrow$ 選択公理」を示せばよい. 選択公理 $\Longrightarrow 1$ と $1 \Longrightarrow 2$ と $3 \Longrightarrow 4$ は明らか.

($2 \Longrightarrow 3$) $\mathbb{R}$ が整列可能だから $2^{\mathbb{N}}$ が整列可能. これを使って超フィルター $F \subset 2^{\mathbb{N}}$ を構成することが出来る.

(4 かつ (R) $\Longrightarrow$ 選択公理) $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を互いに素な非空集合の族とする. 仮定によりある無限集合 A と非単項超フィルター $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(A)$ が存在する. $A \cap \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \emptyset$ としてよい.

$\lambda \in \Lambda$ とする. $Y_\lambda := X_\lambda \cup A$ の位相を

$$\mathcal{O}_\lambda := \{B \subset Y_\lambda \mid B \subset A \text{ または「} X_\lambda \setminus B \subset A \text{ かつ } |X_\lambda \setminus B| < \infty \text{」}\}$$

で定める. 直和 $Y := \coprod_{\lambda \in \Lambda} (Y_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)$ の一点コンパクト化を $(Z, \mathcal{R})$ とする. $(Z, \mathcal{R})$ はコンパクト R_1 空間である. 故に仮定 (R) により Z のコンパクト Hausdorff 位相 $\mathcal{T} \supset \mathcal{R}$ が存在する. このとき $\mathcal{R}_\lambda := \mathcal{R}|_{X_\lambda}$ と定める. $\mathcal{F}_\lambda \subset \mathcal{P}(Y_\lambda)$ を $\mathcal{F}$ で生成される超フィルターとすれば $\mathcal{F}_\lambda$ は $(X_\lambda, \mathcal{R}_\lambda)$ で唯一つの収束点 x_λ を持つ.

これにより $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ を取ることができる. $\square$

参考文献

[1] Horst Herrlich, Kyriakos Keremedis, Extending compact topologies to compact Hausdorff topologies in ZF, Topology and its Applications 158 (2011), 2279–2286, http://dx.doi.org/10.1016/j.topol.2011.02.012

[2] Horst Herrlich, Kyriakos Keremedis, AC holds iff every compact completely regular topology can be extended to a compact Tychonoff topology, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 52 (2011), No. 1, 139–143, http://dml.cz/dmlcz/141433