$\bigcup, \bigcap$ の分配法則と選択公理

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2012 年 1 月 31 日

定理. $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は非空集合の族を表すとし，$X := \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ と置く．次の命題は同値.

1. 選択公理
2. 任意の $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ と，定義域が $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(\{\lambda\}\times X_\lambda)$ である写像 A に対し
$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\bigcup_{x_\lambda\in X_\lambda} A(\lambda, x_\lambda) = \bigcup_{(x_\lambda)\in X}\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A(\lambda, x_\lambda)$$
3. 任意の $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対し
$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\bigcup_{x_\lambda\in X_\lambda} x_\lambda = \bigcup_{(x_\lambda)\in X}\bigcap_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda$$

証明. $(1 \Longrightarrow 2)$ まず $\supset$ は選択公理によらず ZF で成立している.

$\because)$ 任意の $u \in \bigcup_{(x_\lambda)\in X}\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A(\lambda, x_\lambda)$ を取る．即ち，ある元 $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in X$ が存在して $u \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A(\lambda, y_\lambda)$ となる．よって各 $\lambda\in\Lambda$ に対して $u \in A(\lambda, y_\lambda) \subset \bigcup_{x_\lambda\in X_\lambda} A(\lambda, x_\lambda)$ だから $u \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda}\bigcup_{x_\lambda\in X_\lambda} A(\lambda, x_\lambda)$ である.

なので $\subset$ を示せばよい．$u \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda}\bigcup_{x_\lambda\in X_\lambda} A(\lambda, x_\lambda)$ とする．即ち，任意の $\lambda\in\Lambda$ に対して $u \in \bigcup_{x_\lambda\in X_\lambda} A(\lambda, x_\lambda)$ である．つまり $B_\lambda := \{x_\lambda \in X_\lambda \mid u \in A(\lambda, x_\lambda)\}$ は空でない．そ

こで $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に選択公理を適用して元 $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\in\prod_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\subset X$ を得る．このとき

$$u\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A(\lambda,y_\lambda)\subset\bigcup_{(x_\lambda)\in X}\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A(\lambda,x_\lambda).$$

$(2\Longrightarrow 3)$ $A(\lambda,x):=x$ として仮定を適用すれば明らか.

$(3\Longrightarrow 1)$ 集合 u を任意に一つ選んでおく．任意の $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を取り，$\lambda\in\Lambda$ に対して $Y_\lambda:=\{\{u,x\}\mid x\in X_\lambda\}$ と置く．$Y:=\displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda$ として $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に仮定 3 を適用すれば

$$\bigcup_{(y_\lambda)\in Y}\bigcap_{\lambda\in\Lambda}y_\lambda=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\bigcup_{y_\lambda\in Y_\lambda}y_\lambda=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\bigcup_{x_\lambda\in X_\lambda}\{u,x\}\ni u$$

従って，ある $(y_\lambda)\in Y$ が存在して $u\in\displaystyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda}y_\lambda$ となることが分かる．Y_λ の定義から $y_\lambda=\{u,x_\lambda\}$ となる $x_\lambda\in X_\lambda$ が唯一つ存在する．このとき $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\in X$ だから $X\neq\emptyset$. □

参考文献

[1] H. Rubin and J. Rubin, Equivalents of the axiom of choice, North Holland, 1963.

[2] Horst Herrlich, Axiom of Choice，Springer, 2006

[3] 松坂 和夫,『集合・位相入門』，岩波書店，1968 年