群や環の直積と選択公理

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2013 年 4 月 3 日

選択公理とは「非空集合の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$」であった．これを X_λ を別のもの，例えば群にした場合どうなるであろうか?

$\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を群の族とする．このとき明らかに (選択公理によらず)$\prod_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda \neq \emptyset$ である．何故ならば e_λ を群 G_λ の単位元とすれば $(e_\lambda) \in \prod_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ となるからである．また，互いに異なる $\lambda_0, \cdots, \lambda_n \in \Lambda$ を任意に取り

$$g_\lambda = \begin{cases} \text{任意の } g \in G_{\lambda_i} & (\lambda = \lambda_i \text{のとき}) \\ e_\lambda & (\lambda \neq \lambda_0, \cdots, \lambda_n \text{のとき}) \end{cases}$$

とすれば $(g_\lambda) \in \prod_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ である．即ち群の直積 $\prod_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ は (選択公理によらず) たくさんの元を持つことが分かる．

これは各群が単位元を一意に持つから言えることであるが，では成分に単位元が一切現れないような元は取れるであろうか?

定理. 選択公理
$\Longleftrightarrow$ 非自明群の族 $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，「任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $g_\lambda \neq e_\lambda$」を満たす元 $(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ が存在する．

証明. $(\Longrightarrow)$ 明らか．

$(\Longleftarrow)$ 選択公理と同値な AMC を示す．

> ※ AMC (= the Axiom of Multiple Choice) とは次の命題のこと．
>
> 非空集合の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$に対し，有限集合の族 $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$で
> 任意の$\lambda \in \Lambda$に対し$\emptyset \neq F_\lambda \subset X_\lambda$となるものが存在する．
>
> 同値性の証明は the Axiom of Multiple Choice を参照.

$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を非空集合の族とする．$\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X_\lambda) := \{Y \subset X_\lambda \mid Y$ は有限集合 $\}$ は対称差 $Y \triangle Z := (Y \cup Z) \setminus (Z \cap Y)$ を積として群になる．単位元は $\emptyset$ である．仮定により $(Y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X_\lambda)$ で各 $\lambda \in \Lambda$ について $Y_\lambda \neq \emptyset$ となるものが取れる．よって AMC が成立することが分かる． $\square$

この場合証明に基礎の公理を使用しているが，群を環にした場合を考えると (基礎の公理無しに) 次の同値が成り立つ.

定理. 選択公理
$\Longleftrightarrow$ 環の族 $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で「任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $|R_\lambda| \geq 3$」を満たすものに対して，「任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $x_\lambda \neq 0_\lambda, 1_\lambda$」を満たす元 $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda$ が存在する．

証明. ($\Longrightarrow$) 明らか.
($\Longleftarrow$) 選択公理と同値な次の命題を示す.

> 集合族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$が「任意の$\lambda \in \Lambda$に対し $|X_\lambda| \geq 2$」を満たすとき，
> 有限集合の族 $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$が存在して任意の$\lambda \in \Lambda$に対して$\emptyset \neq F_\lambda \subsetneq X_\lambda$となる．

※同値性の証明は the Axiom of Multiple Choice の定理 2 を参照.

$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を非空集合の族で $|X_\lambda| \geq 2$ を満たすとする．$R_\lambda := \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X_\lambda) \cup \{X_\lambda \setminus Y \mid Y \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X_\lambda)\}$ は対称差 $\triangle$ を和, 共通部分 $\cap$ を積として環になる．零元は $\emptyset$, 単位元は X_λ である．明らかに $|R_\lambda| \geq 3$ だから，仮定により $(Y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X_\lambda)$ で各 $\lambda \in \Lambda$ について $Y_\lambda \neq \emptyset, X_\lambda$ となるものが取れる．そこで $f(\lambda) := \begin{cases} Y_\lambda & (Y_\lambda\text{が有限集合のとき}) \\ X_\lambda \setminus Y_\lambda & (Y_\lambda\text{が無限集合のとき}) \end{cases}$ とすればよい． $\square$

参考文献

[1] K. Keremedis, Some Equivalents of AC in Algebra, Algebra Universalis, 36 (1996), 564–572