線型空間の次元の一意性

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2015 年 2 月 21 日

線型空間 V に基底 B があったとき，これの濃度 $|B|$ を V の次元というが，これには一意性がある．即ち次の命題が知られている．

命題． $B, C \subset V$ が共に V の基底であるとき，$|B| = |C|$．

ところが，この命題の証明には選択公理が必要なのである．それを示すため，以下のように permutation モデルを構成する．

アトム全体の集合 A が $A = B \cup C$，$B = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$，$C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$，$B_n = \{b_{n1}, \dots, b_{n6}\}$，$C_n = \{c_{n1}, \dots, c_{n6}\}$ と書けているとする．置換 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in S_6$ を以下のように定める．

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (12)(34)(5)(6) & \alpha_2 &= (12)(34)(5)(6) \\ \beta_1 &= (13)(24)(5)(6) & \beta_2 &= (12)(3)(4)(56) \\ \gamma_1 &= (14)(23)(5)(6) & \gamma_2 &= (1)(2)(34)(56) \end{aligned}$$

$\alpha \in \mathrm{Aut}(A)$ を B_n 上 α_1 のように，C_n 上 α_2 のように作用するものとする．$\beta, \gamma \in \mathrm{Aut}(A)$ も同様に定める．

$$G = \{g \in \mathrm{Aut}(A) \mid \text{各 } n \in \mathbb{N} \text{ について } g|_{B_n \cup C_n} = 1, \alpha, \beta, \gamma\}$$

として $I := \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(A)$ により permutation モデル U を取る．X を B を基底とする実線型空間，Y を C を基底とする実線型空間とする．

命題． $X \cong Y$ である．

証明． X_n, Y_n を B_n, C_n を基底とする 6 次元実線型空間とする．線型写像 $f_n \colon X_n \longrightarrow Y_n$

を，次の行列により定める．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

この行列の行列式は -8 となるので，f_n は同型である．$X \cong \bigoplus X_n$，$Y \cong \bigoplus Y_n$ だから，f_n から同型 $f\colon X \longrightarrow Y$ が得られる．また計算すれば $\alpha_2(f(\alpha_1^{-1}(x))) = f(x)$，$\beta_2(f(\beta_1^{-1}(x))) = f(x)$，$\gamma_2(f(\gamma_1^{-1}(x))) = f(x)$ となることがわかる．故に任意の $g \in G$ に対して $g(f) = f$ である．よって $f \in U$． □

命題. $|B| \neq |C|$ である．

証明. $\aleph_0 \leq |B|$ かつ $\aleph_0 \not\leq |C|$ を示せばよい．

まず $f\colon \omega \longrightarrow B$ を $f(n) := b_{n6}$ で定める．このとき明らかに $f \in U$ で f は単射だから $\aleph_0 \leq |B|$ である．

次に $f\colon \omega \longrightarrow C$ が単射で $f \in U$ とする．f の support を E とする．$E = C_0 \cup \cdots \cup C_{n-1}$ としてよい．f が単射だから，ある $m \in \omega$ が存在して $f(m) \notin E$ となる．簡単のため，$f(m) = c_{k1}$ とする．$k \geq n$ である．このとき $g \in G$ を $g|_E = \mathrm{id}$，$g|_{C_k} = \alpha_2$ とすれば $g(f) = f$ だから $c_{k1} = f(m) = g(f)(m) = g(f(m)) = g(c_{k1}) = \alpha_2(c_{k1}) = c_{k2}$ となり矛盾する． □

以上により

定理. 線型空間の基底の濃度の一意性は ZFA で証明できない． □