有限集合・無限集合の定義と選択公理

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2016 年 1 月 24 日

次の命題の証明は順序数・濃度の簡単なまとめを参照.

命題 1. 濃度 $\kappa, \lambda \geq 2$ に対し $\kappa + \lambda \leq \kappa \cdot \lambda$. □

命題 2. 任意のアレフ $\aleph$ に対して $\aleph^2 = \aleph$. □

命題 3. 濃度 κ, λ, μ とアレフ $\aleph$ が $\kappa \cdot \aleph \leq \lambda + \mu$ を満たすとき, $\kappa \leq \lambda$ または $\aleph \leq \mu$ となる. □

ある自然数 n と全単射 $X \longrightarrow n$ が存在するとき, X を有限集合といい, 有限集合でない集合を無限集合という. このように, 通常無限集合は「有限集合でない」と定義されるが, では無限集合を直接定義することはできるであろうか. そうして考えられたのが Dedekind 無限集合である.

定義. X を集合とする.

1. X が Dedekind 無限 $\iff$ $|Y| = |X|$ となる真部分集合 $Y \subsetneq X$ が存在する.
2. X が Dedekind 有限 $\iff$ X が Dedekind 無限でない.

明らかに Dedekind 無限集合は無限集合 (即ち有限集合は Dedekind 有限) だから, 逆に無限集合は Dedekind 無限 (即ち Dedekind 有限集合はは有限集合) であることを示したいのだが, 実はこれには選択公理を使わなければいけないことが知られている.

命題 4. 集合 X に対して次の条件は (ZF 上) 同値.

1. X は Dedekind 無限集合.
2. 全射でない単射 $X \longrightarrow X$ が存在する.

3. $\aleph_0 \le |X|$.
4. 単射 $\mathbb{N} \longrightarrow X$ が存在する．
5. X は可算無限部分集合を持つ．
6. $|X| = |X| + \aleph_0$.
7. $|X| = |X| + 1$.

証明. $1 \iff 2$ と $3 \iff 4 \iff 5$ は明らか．

$(2 \Longrightarrow 4)$ $f\colon X \longrightarrow X$ を全射でない単射とする．全射でないから $x \in X \setminus f(X)$ が取れる．このとき $g\colon \mathbb{N} \longrightarrow X$ を

$$g(n) := \begin{cases} x & (n = 0 \text{ のとき}) \\ f(g(n-1)) & (n > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義すればこれは単射である．

$(5 \Longrightarrow 6)$ $Y \subset X$ を可算無限部分集合とする．$|Y| = |Y| + \aleph_0$ だから

$$|X| = |(X \setminus Y) \cup Y| = |X \setminus Y| + |Y| = |X \setminus Y| + |Y| + \aleph_0 = |X| + \aleph_0.$$

$(6 \Longrightarrow 7)$ $\aleph_0 = \aleph_0 + 1$ だから

$$|X| = |X| + \aleph_0 = |X| + \aleph_0 + 1 = |X| + 1.$$

$(7 \Longrightarrow 1)$ X に含まれない元 ∞ を一つ取る．$|X| = |X|+1$ より全単射 $f\colon X \cup \{\infty\} \longrightarrow X$ が存在する．このとき $f(X) \subsetneq X$ かつ $|f(X)| = |X|$ である． □

命題 5. 選択公理を仮定する．無限集合は Dedekind 無限である．

証明. 整列可能定理を使えば明らか．

直接示すには「選択公理 $\Longrightarrow$ 整列可能定理」の証明を真似ればよい．X を無限集合とする．選択公理により $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ の選択関数 g が存在する．このとき $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow X$ を帰納的に $f(n) := g(X \setminus \{f(0), f(1), \cdots, f(n-1)\})$ で定義すれば f は単射である．

※ X が無限集合であるから，$X \setminus \{f(0), f(1), \cdots, f(n-1)\} \neq \emptyset$ となることに注意する．

□

実はこれは可算選択公理があれば証明できる．

命題 6. 可算選択公理を仮定する．無限集合は Dedekind 無限である．

証明. X を無限集合とする．命題 4 により可算無限部分集合 $Y \subset X$ の存在を示せばよい．$n \geq 0$ に対して $X_n := \{\langle x_0, x_1, \cdots, x_n \rangle \in X^{n+1} \mid i \neq j$ ならば $x_i \neq x_j\}$ と置く．X が無限集合だから $X_n \neq \emptyset$ である．そこで集合族 $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ に可算選択公理を適用して選択関数 $\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ を得る．$\varphi(n) \in X_n \subset X^n$ だから $\varphi(n) = \langle x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \cdots, x_n^{(n)} \rangle$ と書ける．$Y := \{x_i^{(n)} \mid i \leq n\}$ と置けば，$\{\langle i, n \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i \leq n\}$ は可算無限集合だから Y は高々可算集合である．しかし X_n の定義から明らかに Y は無限集合である．従って $Y \subset X$ は可算無限部分集合である． □

命題 7. $|X| < |Y|$ かつ $|Y| \leq^* |X|$ となるような無限集合 X, Y は存在しない
$\Longrightarrow$ 無限集合は Dedekind 無限集合

証明. A を Dedekind 有限な無限集合とする．$A_n := \{\langle a_0, a_1, \cdots, a_n \rangle \in A^{n+1} \mid i \neq j$ ならば $x_i \neq x_j\}$ と置いて $X := \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$，$Y := X \cup \{\emptyset\}$ と置く．明らかに $|X| \leq |Y|$，$|Y| \leq^* |X|$ である．従って $|X| \neq |Y|$ を示せばよい．

A が Dedekind 有限であることから Y も Dedekind 有限集合である．明らかに $|Y| = |X| + 1$ で，また命題 4 により $|Y| \neq |Y| + 1$ である．よって $|X| \neq |Y|$ である． □

Dedekind 有限以外にも，有限の定義は色々考えられている．

定義. X を集合とする．

1. X が I-finite $\Longleftrightarrow$ 任意の $\emptyset \neq \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ が極大元を持つ．
2. X が II-finite $\Longleftrightarrow$ 任意の部分全順序 $\emptyset \neq \mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ が最大元を持つ．
3. X が III-finite $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{P}(X)$ が Dedekind 有限.
4. X が IV-finite $\Longleftrightarrow$ X が Dedekind 有限.
5. X が V-finite $\Longleftrightarrow$ $|X| = 0$ または $2|X| > |X|$.
6. X が VI-finite $\Longleftrightarrow$ $|X| \leq 1$ または $|X|^2 > |X|$.
7. X が VII-finite $\Longleftrightarrow$ X が整列可能でないまたは $|\mathbb{N}| \not\leq |X|$.

定義. $P(J, K)$ で次の命題を表す: 任意の X に対して「X が J-finite $\Longrightarrow$ X が K-finite」.

命題 8. 任意の X に対して「X が有限集合 $\Longleftrightarrow$ X が I-finite」.

証明. ($\Longrightarrow$) 明らか.

($\Longleftarrow$) X を I-finite とすると，$\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X) \subset \mathcal{P}(X)$ が極大元 Y を持つ．このとき極大性から明らかに $Y = X$ だから X は有限集合である． □

命題 9. $J < K$ ならば $P(J, K)$ である．

証明. (I-finite $\Longrightarrow$ II-finite) 明らか

(II-finite $\Longrightarrow$ III-finite) 明らか

(III-finite $\Longrightarrow$ IV-finite) 単射 $X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ が存在するから明らか．

(IV-finite $\Longrightarrow$ V-finite) X が V-finite でないとする．$|X| > 0$ かつ $2|X| = |X|$ だから X は Dedekind 無限である，即ち IV-finite でない．

(V-finite $\Longrightarrow$ VI-finite) X を V-finite とする．$|X| > 1$ ならば $|X| < 2|X| \leq |X|^2$ だから VI-finite である．$|X| \leq 1$ ならば定義から VI-finite である．

(VI-finite $\Longrightarrow$ VII-finite) X を VI-finite とする．$|X| \leq 1$ ならば $|\mathbb{N}| \not\leq |X|$ だから VII-finite である．$|X|^2 > |X|$ ならば X は整列可能でない (命題 2 を参照) から VII-finite である． □

命題 10. $J < K$ ならば $P(L, J) \Longrightarrow P(L, K)$ である．

証明. 明らか． □

定理 11. 選択公理 $\Longrightarrow P(\mathrm{VII}, \mathrm{I})$ である．従って選択公理の下では I-finite から VII-finite までの定義は全て同値である．

証明. 明らか． □

定理 12. 選択公理 $\Longleftrightarrow P(\mathrm{VII}, \mathrm{VI})$

証明. ($\Longrightarrow$) 明らか．

($\Longleftarrow$) X を無限集合とする．$|X^{\mathbb{N}}| > 1$ かつ $|X^{\mathbb{N}}|^2 = |X^{\mathbb{N}}|$ だから $X^{\mathbb{N}}$ は VI-finite でない．故に VII-finite ではないが，$|\mathbb{N}| \leq |X^{\mathbb{N}}|$ だから $X^{\mathbb{N}}$ は整列可能である．故に X も整列可能である． □

系. 次の命題は (ZF 上) 同値．

1. 選択公理
2. $P(\mathrm{VII}, \mathrm{I})$
3. $P(\mathrm{VII}, \mathrm{II})$
4. $P(\mathrm{VII}, \mathrm{III})$
5. $P(\mathrm{VII}, \mathrm{IV})$
6. $P(\mathrm{VII}, \mathrm{V})$ □

定理 13. 選択公理 $\iff P(\mathrm{VI}, \mathrm{V})$

証明. $(\Longrightarrow)$ 明らか．

$(\Longleftarrow)$ κ を無限基数として $\lambda := \kappa \cdot \aleph_0 + (\kappa \cdot \aleph_0)^*$ とすれば $2\lambda = \lambda$ である．故に仮定から $\lambda^2 = \lambda$ となる．従って

$$\lambda = \lambda^2 = (\kappa \cdot \aleph_0)^2 + 2\kappa \cdot \aleph_0 \cdot (\kappa \cdot \aleph_0)^* + ((\kappa \cdot \aleph_0)^*)^2 \geq \kappa \cdot \aleph_0 \cdot (\kappa \cdot \aleph_0)^*$$

より $\kappa \cdot \aleph_0 \cdot (\kappa \cdot \aleph_0)^* \leq (\kappa \cdot \aleph_0)^* + \kappa \cdot \aleph_0$ が分かる．故に命題 3 から $\kappa \cdot \aleph_0 \leq (\kappa \cdot \aleph_0)^*$ または $(\kappa \cdot \aleph_0)^* \leq \kappa \cdot \aleph_0$ となる．$(\kappa \cdot \aleph_0)^* \not\leq \kappa \cdot \aleph_0$ となるから $\kappa \leq \kappa \cdot \aleph_0 \leq (\kappa \cdot \aleph_0)^*$ である． □

系. 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 選択公理
2. $P(\mathrm{VI}, \mathrm{I})$
3. $P(\mathrm{VI}, \mathrm{II})$
4. $P(\mathrm{VI}, \mathrm{III})$
5. $P(\mathrm{VI}, \mathrm{IV})$ □

以上で得られた選択公理と同値な $P(J, K)$ を言い換えると，次の系が得られる．

系. 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 選択公理
2. $\mathcal{P}(X)$ が Dedekind 無限ならば X は整列可能である．($P(\mathrm{VII}, \mathrm{III})$)
3. Dedekind 無限集合は整列可能である．($P(\mathrm{VII}, \mathrm{IV})$)
4. $2|X| = |X|$ ならば X は整列可能である．($P(\mathrm{VII}, \mathrm{V})$)
5. $|X|^2 = |X|$ ならば X は整列可能である．($P(\mathrm{VII}, \mathrm{VI})$)
6. $\mathcal{P}(X)$ が Dedekind 無限ならば $|X|^2 = |X|$．($P(\mathrm{VI}, \mathrm{III})$)
7. Dedekind 無限集合 X に対して $|X|^2 = |X|$．($P(\mathrm{VI}, \mathrm{IV})$)
8. 無限集合 X に対して，$2|X| = |X| \Longrightarrow |X|^2 = |X|$．($P(\mathrm{VI}, \mathrm{V})$) □

定義. X を集合とする．

1. X が D-finite $\iff$ $|X| \leq 1$ であるか，ある A, B が存在して $|A| < |X|$ かつ $|B| < |X|$ かつ $X = A \cup B$.
2. X が amorphous $\iff X = A \cup B$ (A, B は互いに素な無限集合) と書けない．

命題 14. $P(\mathrm{IV}, \mathrm{D})$ である．

証明. X を IV-finite，即ち Dedekind 有限とする．$|X| \leq 1$ ならば D-finite であるから $|X| > 1$ とする．$x \in X$ を一つ取れば，X が Dedekind 有限だから $|X \setminus \{x\}| < |X|$ である．故に $|X \setminus \{x\}| < |X|$，$|x| < |X|$，$X = (X \setminus \{x\}) \cup \{x\}$ と書けるので D-finite である． □

命題 15. $P(\mathrm{D}, \mathrm{VII})$ である．

証明. X を D-finite とする．$|X| \leq 1$ ならば VII-finite である．$|X| > 1$ の場合は明らかに X は整列不可能であるから VII-finite である． □

命題 16. X が有限集合 $\Longrightarrow$ X は amorphous.

証明. 明らか. □

命題 17. X が amorphous $\Longrightarrow$ X は II-finite.

証明. X を II-finite でない集合とすると，最大元を持たない部分全順序 $\emptyset \neq \mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ が存在する．

(i) 無限集合 $Y \in \mathcal{C}$ が存在する場合

このとき $X \setminus Y$ も無限集合で $X = (X \setminus Y) \cup Y$ だから，X は amorphous である．

(ii) 任意の $Y \in \mathcal{C}$ が有限集合の場合

$\mathcal{C}$ は最大元を持たないから $\mathcal{C} = \{F_n \mid n \in \mathbb{N}\}$，$n < m$ ならば $F_n \subsetneq F_m$，と書けることが分かる．$G_0 := F_0$，$G_{n+1} := F_{n+1} \setminus F_n$ として

$$A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_{2n}, \quad B := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_{2n+1}$$

とすれば A, B は互いに素な無限集合で $X = A \cup B$ である． □

定理 18. 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 選択公理
2. $\kappa \cdot \lambda = \kappa + \lambda$.
3. $\kappa + \lambda = \kappa$ または $\kappa + \lambda = \lambda$.

証明. 濃度の性質を参照. □

定理 19. 選択公理 $\Longleftrightarrow P(\mathrm{D}, \mathrm{I})$

証明． ($\Longrightarrow$) 定理 18 の 3 より明らか．

($\Longleftarrow$) 定理 18 の 3 を示す．$\kappa = |X|,\ \lambda = |Y|$ を任意の無限濃度とすれば $X \cup Y$ が無限集合だから $|X| = |X \cup Y|$ または $|Y| = |X \cup Y|$ となる． $\square$

定理 20． 選択公理
$\Longleftrightarrow$「X が有限集合 $\Longleftrightarrow$ $|X| \leq 1$ であるか，ある Y が存在して $|X| + |Y| < |X| \cdot |Y|$.」

証明． ($\Longrightarrow$) 定理 18 の 2 より明らか．

($\Longleftarrow$) 定理 18 の 2 を示す．$\kappa = |X|,\ \lambda = |Y|$ を任意の無限濃度とすれば X が無限集合だから命題 1 より $|X| + |Y| = |X| \cdot |Y|$ となる． $\square$

最後に，命題「無限集合は Dedekind 無限集合である」と同値な命題を述べておく．その為にまず補題を一つ示す．

補題 21． 集合 X に対して $\aleph_0 \leq^* |X| \Longleftrightarrow \aleph_0 \leq \mathcal{P}(X)$ である．

証明． ($\Longrightarrow$) $f\colon X \longrightarrow \mathbb{N}$ を全射とする．このとき $f^{-1}\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ は単射である．

($\Longleftarrow$) $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ を単射とする．$g\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ を以下のように帰納的に定義する．$n \geq 0$ とする．$0 \leq m \leq n-1$ に対し $g(m)$ が

$$\left|\left\{ f(k) \setminus \bigcup_{m<n} g(m) \;\middle|\; k \geq n \right\}\right| = \infty$$

となるように定義されているとする．このとき

$$n^* := \min\left\{ k \in \mathbb{N} \;\middle|\; k \geq n,\ f(k) \setminus \bigcup_{m<n} g(m) \neq \emptyset,\ (X \setminus f(k)) \setminus \bigcup_{m<n} g(m) \neq \emptyset \right\}$$

$$A_n := f(n^*) \cup \bigcup_{m<n} g(m)$$

として

$$g(n) := \begin{cases} f(n^*) \setminus \bigcup_{m<n} g(m) & \big(|\{f(k) \setminus A_n \mid k > n^*\}| = \infty \text{ のとき}\big) \\ X \setminus \Big(f(n^*) \setminus \bigcup_{m<n} g(m)\Big) & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

と定める．

このとき $h\colon X \longrightarrow \mathbb{N}$ を

$$h(x) := \begin{cases} n & (\text{ある } n \text{ に対して } x \in g(n) \text{ となるとき}) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

と定めれば h は全射である． $\square$

命題 22. 次の命題は (ZF 上) 同値である.

1. 任意の Dedekind 有限集合は有限集合である (即ち $P(\mathrm{IV},\mathrm{I})$).
2. 任意の Dedekind 有限集合は amorphous である.
3. 任意の Dedekind 有限集合は II-finite である (即ち $P(\mathrm{IV},\mathrm{II})$).
4. Dedekind 有限集合の冪集合は Dedekind 有限集合である (即ち $P(\mathrm{IV},\mathrm{III})$).
5. Dedekind 有限集合 X と Dedekind 無限集合 Y に対し $|X| \leq |Y|$.
6. 非可算集合 X と可算集合 Y に対し $|X \cup Y| = |X|$.
7. 非可算集合 X と可算集合 Y に対し $|X \setminus Y| = |X|$.
8. $|X| > \aleph_0$ かつ $|Y| = \aleph_0$ ならば $|X \setminus Y| > \aleph_0$.
9. 任意の集合 X に対し $\aleph_0 \leq |X|$ または $|X| \leq \aleph_0$.

証明. 1$\Longrightarrow$2，2$\Longrightarrow$3，3$\Longrightarrow$4 は明らか.

(4 $\Longrightarrow$ 1) Dedekind 有限な無限集合 X が存在すると仮定する．X が無限集合だから $\mathcal{P}(X) \ni Y \longmapsto |Y| \in \mathbb{N}$ は全射である．即ち $\aleph_0 \leq^* |\mathcal{P}(X)|$ となる．従って補題 21 により $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ は Dedekind 無限集合である．一方 X が Dedekind 有限だから仮定 4 により $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ が Dedekind 有限集合となり矛盾する.

(1 $\Longrightarrow$ 5) 仮定 1 より Dedekind 有限集合は有限集合だから明らか.

(5 $\Longrightarrow$ 1) X を Dedekind 有限集合とする．$\mathbb{N}$ は Dedekind 無限集合だから仮定 5 により $|X| \leq \aleph_0$．よって X が無限集合と仮定すると X は可算無限，即ち Dedekind 無限集合となって矛盾する.

(1 $\Longrightarrow$ 6) X を非可算集合，Y を可算集合とする．仮定より X は Dedekind 無限集合である．$|Y \setminus X| \leq \aleph_0$ だから命題 4 の条件 6 と 7 により

$$|X \cup Y| = |X| + |Y \setminus X| = |X|.$$

(6 $\Longrightarrow$ 7) X を非可算集合，Y を可算集合とすると $X \setminus Y$ も非可算集合である．故に仮定 6 により $|X| = |(X \setminus Y) \cup Y| = |X \setminus Y|$.

(7 $\Longrightarrow$ 8) 明らか.

(8 $\Longrightarrow$ 1) X を無限集合とする．X が可算無限ならば明らかに Dedekind 無限だから，X は非可算無限集合としてよい．このとき $|X \sqcup \mathbb{N}| > \aleph_0$ だから仮定 8 により $|X| = |(X \sqcup \mathbb{N}) \setminus \mathbb{N}| > \aleph_0$ となり，X は Dedekind 無限集合である.

(1 $\Longleftrightarrow$ 9) 明らか. $\square$

参考文献

[1] P. E. Howard, M. F. Yorke, Definitions of Finite, Fundamenta Mathematicae 133 (1989), 169–177, http://pldml.icm.edu.pl/pldml/element/bwmeta1.element.bwnjournal-article-fmv133i1p16bwm?q=bwmeta1.element.bwnjournal-number-fm-1989-133-3;0&qt=CHILDREN-STATELESS

[2] Horst Herrlich, Axiom of Choice，Springer, 2006

[3] Thomas J. Jech, The Axiom of Choice, North Holland, Amsterdam, 1973