従属選択公理について

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2013 年 11 月 4 日

定義. 次の命題を従属選択公理 (Axiom of Dependent Choice) という.
非空集合 X 上の二項関係 $R \subset X \times X$ が

$$\text{任意の } x \in X \text{ に対してある } y \in X \text{ が存在して } xRy$$

を満たすとき, X のある点列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ が存在して任意の n に対して $x_n R x_{n+1}$ となる.

命題 1. 選択公理 $\Longrightarrow$ 従属選択公理

証明. $X \neq \emptyset$ が従属選択公理の仮定を満たすとする. $A_x := \{y \in X \mid xRy\}$ と置く. $A_x \neq \emptyset$ だから $\{A_x\}_{x \in X}$ に選択公理を適用して選択関数 $f \colon X \longrightarrow \bigcup_{x \in X} A_x \subset X$ を得る. あとは $x_0 \in X$ を一つ取り $x_{n+1} := f(x_n)$ と定めればよい. □

命題 2. 従属選択公理 $\Longrightarrow$ 可算選択公理

証明. $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ を互いに素な非空集合の族とする. $X := \bigcup_{i=0}^{\infty} X_i$ として二項関係 $R := \bigcup_{i=0}^{\infty} (X_i \times X_{i+1}) \subset X \times X$ を考える. この R は明らかに従属選択公理の仮定を満たす. よってある $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ が存在して任意の n に対して $x_n R x_{n+1}$ が成り立つ. $x_0 \in X_m$ となる m を取ると明らかに $x_n \in X_{m+n}$ である. 故に $\prod_{i=m}^{\infty} X_i \neq \emptyset$ となる. 従って $\prod_{i=0}^{\infty} X_i = \prod_{i=0}^{m-1} X_i \times \prod_{i=m}^{\infty} X_i \neq \emptyset$ が分かる. □

これにより, 可算選択公理が ZF で証明できないことを認めれば, 従属選択公理が ZF で証明できないことが分かる.

命題 3. 従属選択公理
$\Longleftrightarrow$ 従属選択公理において $x_0 \in X$ は任意に選べる．即ち，非空集合 X 上の二項関係 $R \subset X \times X$ が「任意の $x \in X$ に対してある $y \in X$ が存在して xRy」を満たすとき，任意の $x_0 \in X$ に対して X のある点列 $\{x_n\}_{1=0}^{\infty}$ が存在して任意の $n \geq 0$ に対して $x_n R x_{n+1}$ となる．

証明. $\Longleftarrow$ は明らかなので $\Longrightarrow$ を示す．
非空集合 X 上の二項関係 $R \subset X \times X$ が「任意の $x \in X$ に対してある $y \in X$ が存在して xRy」を満たすとし，$x_0 \in X$ を任意の元とする．$A := \{\langle x_1, \cdots, x_s\rangle \mid s \geq 1,\ x_0Rx_1,\ \cdots,\ x_{s-1}Rx_s\}$ と置く．二項関係 $S \subset A \times A$ を

$$\langle x_1, \cdots, x_s\rangle S \langle y_1, \cdots, y_t\rangle \Longleftrightarrow s < t \text{ かつ } x_1 = y_1,\ \cdots,\ x_s = y_s$$

で定義する．この S は従属選択公理の仮定を満たす．よってある $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ が存在して任意の n に対して $a_n S a_{n+1}$ が成り立つ．$a_n \in A$ だから $a_n = \langle a_{n,1}, \cdots, a_{n,s_n}\rangle$ と書ける．S の定義より $0 < s_0 < s_1 < \cdots$ だから $n+1 \leq s_n$ である．よって $x_{n+1} := a_{n,n+1}$ と定義できて，このとき任意の n に対して $x_n R x_{n+1}$ である． □

定義. 順序数 α に対して，次の命題を $\mathrm{DC}(\alpha)$ で表す．
関係 $R \subset \mathcal{P}(X) \times X$ が

$|Y| < |\alpha|$ となる任意の部分集合 $Y \subset X$ に対してある $x \in X$ が存在して $R(Y, x)$

を満たすとき，ある $f \colon \alpha \longrightarrow X$ が存在して任意の $\beta < \alpha$ に対して $R(f"\beta, f(\beta))$ となる．

※ $f"\beta := \{f(\gamma) \mid \gamma < \beta\}$ である．

命題 4. 従属選択公理 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{DC}(\omega)$

証明. ($\Longrightarrow$) 関係 $R \subset \mathcal{P}(X) \times X$ が

$|Y| < |\omega|$ となる任意の部分集合 $Y \subset X$ に対してある $x \in X$ が存在して $R(Y, x)$

を満たすとする．$\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X) := \{Y \subset X \mid |Y| < |\omega|\}$，$A := \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X) \times X$ と置く．二項関係 $S \subset A \times A$ を

$$\langle Y, y\rangle S \langle Z, z\rangle \Longleftrightarrow Y \cup \{z\} = Z \text{ かつ } R(Y, z)$$

で定める．この S は従属選択公理の仮定を満たす．よって A の点列 $\{\langle Y_n, y_n\rangle\}_{n=0}^{\infty}$ で任意の n に対して $\langle Y_n, y_n\rangle S \langle Y_{n+1}, y_{n+1}\rangle$ を満たすものが存在する．命題 3 により $Y_0 = \emptyset$ とできる．このとき $f \colon \omega \longrightarrow X$ を $f(n) := y_{n+1}$ で定める．$Y_n = f"n$ である．

$\because$) $n=0$ のときは明らか．$n>0$ のときは

$$Y_n = Y_{n-1} \cup \{y_n\} = f``(n-1) \cup \{f(n-1)\} = f``n$$

である．

$R(Y_n, y_{n+1})$ だったから $R(f``n, f(n))$ となる．

($\Longleftarrow$) 非空集合 X 上の二項関係 $R \subset X \times X$ が「任意の $x \in X$ に対してある $y \in X$ が存在して xRy」を満たすとする．$A := X \times \omega$ と置く．関係 $S \subset \mathcal{P}(A) \times A$ を $B \in \mathcal{P}(A)$, $\langle x, n \rangle \in A$ に対して次のように定める．

(i) $B = \emptyset$ のとき．

$$S(\emptyset, \langle x, n \rangle) \Longleftrightarrow n = 0.$$

(ii) $B \neq \emptyset$ が有限集合で，ある $\langle y, m \rangle \in B$ に対して $m = |B|$ となるとき．

$$S(B, \langle x, n \rangle) \Longleftrightarrow n = |B| + 1 \text{ かつある } \langle y, |B| \rangle \in B \text{ が存在して } yRx.$$

(iii) それ以外の時．常に $S(B, \langle x, n \rangle)$．

この S は $\mathrm{DC}(\omega)$ の仮定を満たす．よってある写像 $f \colon \omega \longrightarrow A$ が存在して任意の $n < \omega$ に対して $S(f``n, f(n))$ である．$S$ の定義から $f(n) = \langle x_n, |f``n| + 1 \rangle$ と書ける．$|f``n| = n$ である．

$\because$) $n=0$ のときは明らか．

$n > 0$ のとき．$f``n = f``(n-1) \cup \{f(n-1)\}$ であり，S の定義から明らかに $f(n-1) \notin f``(n-1)$ であるから

$$|f``n| = |f``(n-1)| + |\{f(n-1)\}| = (n-1) + 1 = 1.$$

故に $f``(n+1) = \{f(0), \cdots, f(n)\} = \{\langle x_0, 0 \rangle, \cdots, \langle x_n, n \rangle\}$ である．従って S の定義から $x_n R x_{n+1}$ である．よって $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ を取ればよい．$\square$

この命題により，$\mathrm{DC}(\alpha)$ は従属選択公理の一般化と考えることができる．

定理． 選択公理 $\Longleftrightarrow$ 任意の順序数 α に対して $\mathrm{DC}(\alpha)$ が成り立つ．

証明． ($\Longrightarrow$) 明らか．

($\Longleftarrow$) 整列可能定理を示す．X を任意の集合とする．X に含まれない元 ∞ を一つ取り

$\bar{X} := X \cup \{\infty\}$ と置く．関係 $R \subset \mathcal{P}(\bar{X}) \times \bar{X}$ を

$$
\begin{aligned}
R(Y, x) &\iff x \notin Y \text{ かつ } Y \subset X \quad (x \in X \text{ のとき}) \\
R(Y, \infty) &\iff Y = \bar{X} \text{ または } Y = X
\end{aligned}
$$

で定義する．この R は「任意の部分集合 $Y \subset \bar{X}$ に対してある $x \in \bar{X}$ が存在して $R(Y, x)$」を満たす．α を $|\alpha| \not\leq |\bar{X}|$ なる順序数とする．(このような順序数は選択公理を使わずに取れる．) R に $\mathrm{DC}(\alpha)$ を適用して写像 $f\colon \alpha \longrightarrow \bar{X}$ を得る．$\beta, \gamma < \alpha$ について，$f(\beta) = f(\gamma) \neq \infty$ ならば $\beta = \gamma$ である．

> $\because$) $\beta \neq \gamma$ と仮定する．$\beta < \gamma$ としてよい．f の取り方から $R(f"\gamma, f(\gamma))$ である．$f(\gamma) \neq \infty$ だから R の定義により $f(\gamma) \notin f"\gamma$ となる．$f(\beta) \in f"\gamma$ だから $f(\beta) \neq f(\gamma)$ となり矛盾する．

$|\alpha| \not\leq |\bar{X}|$ だったから，f は単射ではない．故に $f(\beta) = \infty$ となる $\beta < \alpha$ が存在する．そこで $\gamma := \min\{\beta < \alpha \mid f(\beta) = \infty\}$ と置く．このとき $R(f"\gamma, \infty)$ だから $f"\gamma = X$ または $f"\gamma = \bar{X}$ となるが，γ の最小性から $f"\gamma = X$ が分かる．故に $f|_\gamma\colon \gamma \longrightarrow X$ が全単射になる． □

選択公理に対して AMC があるように，従属選択公理に対して DMC がある．

定義. 次の命題を DMC(Axiom of Dependent Multiple Choice) という．
非空集合 X 上の二項関係 $R \subset X \times X$ が

$$\text{任意の } x \in X \text{ に対してある } y \in X \text{ が存在して } xRy$$

を満たすとき，X のある有限部分集合列 $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ と $x \in F_n$ に対してある $y \in F_{n+1}$ が存在して xRy となる．

定理. 従属選択公理 $\Longrightarrow$ DMC □

定理. 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. DMC
2. $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ を互いに素な非空集合の族で，$|X_0| = 1$ とする．$X := \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ として，全射 $f\colon X \longrightarrow X$ は「$x \in X_{n+1}$ に対して $f(x) \in X_n$」を満たすとする．このときある $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ が存在して $F_n \subset X_n$，$0 < |F_n| < \infty$，$f(F_{n+1}) = F_n$ となる．

3. $y \in X$ とするとき，DMC において $F_0 = \{y\}$ とできる．即ち非空集合 X 上の二項関係 $R \subset X \times X$ が

$$\text{任意の } x \in X \text{ に対してある } y \in X \text{ が存在して } xRy$$

を満たすとき，任意の $y \in X$ に対して X のある有限部分集合列 $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ が存在して，$F_0 = \{y\}$ かつ任意の $n \in \mathbb{N}$ と $x \in F_n$ に対してある $y \in F_{n+1}$ が存在して xRy となる．

証明. ($1 \Longrightarrow 2$) 2 の条件を満たす $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ と f を取る．$X := \displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ 上の二項関係 R を

$$xRy \Longleftrightarrow x = f(y)$$

で定めるとこれは「任意の $x \in X$ に対してある $y \in X$ が存在して xRy」を満たす．故にある $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ が存在して $G_n \subset X$, $0 < |G_n| < \infty$ かつ「任意の $n \in \mathbb{N}$ と $x \in G_n$ に対してある $y \in G_{n+1}$ が存在して xRy」となる．$a \in G_0$ を一つ取り，$a \in X_m$ となる番号 m を取る．このとき $x_m := a$, $x_{m-1} := f(x_m)$, $\cdots$, $x_0 := f(x_1)$ として

$$F_n := \begin{cases} \{x_n\} & (0 \leq n \leq m \text{ のとき}) \\ G_{n-m} \cap X_n & (n > m \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める．このとき $F_n \subset X_n$, $0 < |F_n| < \infty$, $f(F_{n+1}) = F_n$ である．

($2 \Longrightarrow 3$) 非空集合 X 上の二項関係 $R \subset X \times X$ が「任意の $x \in X$ に対してある $y \in X$ が存在して xRy」を満たすとする．$y \in X$ をとる．$n \geq 0$ に対して $X_n := \{\langle y, x_1, \cdots, x_n\rangle \mid yRx_1, \ \cdots, \ x_{n-1}Rx_n\}$ と置く．$X := \displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ として，$f\colon X \longrightarrow X$ を

$$f(x) := \begin{cases} y & (x = y \text{ のとき}) \\ \langle y, x_1, \cdots, x_n\rangle & (x = \langle y, x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}\rangle \in X_{n+1} \text{のとき}) \end{cases}$$

で定義する．この f は仮定 2 の条件を満たす．よってある $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ が存在して $G_n \subset X_n$, $0 < |G_n| < \infty$, $f(G_{n+1}) = G_n$ となる．$\pi_n\colon X_n \longrightarrow X$ を第 $n+1$ 成分への射影として $F_n := \pi_n(X_n)$ とすれば $F_0 = \{y\}$ で $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ は DMC の条件を満たす．

($3 \Longrightarrow 1$) 明らか． $\square$