

Dedekind 有限集合

alg-d

<http://alg-d.com/math/ac/>

2012 年 1 月 17 日

定義. 集合 X が $|Y| = |X|$ となる真部分集合 $Y \subsetneq X$ を持つとき, X を Dedekind 無限集合という. Dedekind 無限集合でないような集合を Dedekind 有限集合という.

明らかに有限集合は Dedekind 有限集合である (即ち, Dedekind 無限集合は無限集合である). 逆に無限集合が Dedekind 無限集合であることは ZF では証明できないことが知られている. つまり, ZF に命題「Dedekind 有限な無限集合が存在する」を加えても (ZF が無矛盾ならば) 矛盾しないのである. 一方, 選択公理を仮定すれば無限集合が Dedekind 無限集合であることが証明できる.

まず Dedekind 無限集合であることの同値な条件を述べておく. 濃度に関する記号については基数の性質を参照.

命題. 集合 X に対し次の条件は (ZF 上) 同値.

1. X は Dedekind 無限集合.
2. 全射でない単射 $X \rightarrow X$ が存在する.
3. $\aleph_0 \leq |X|$
4. 単射 $\mathbb{N} \rightarrow X$ が存在する.
5. X は可算無限部分集合を持つ.
6. $|X| = |X| + \aleph_0$
7. $|X| = |X| + 1$

証明. $1 \iff 2$ と $3 \iff 4 \iff 5$ は明らか.

($2 \implies 4$) $f: X \rightarrow X$ を全射でない単射とする. 全射でないから $x \in X \setminus f(X)$ が取

れる．このとき $g: \mathbb{N} \rightarrow X$ を

$$g(n) := \begin{cases} x & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_n(x) & (n > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義すればこれは単射である．

(5 $\implies$ 6) $Y \subset X$ を可算無限部分集合とする． $|Y| = |Y| + \aleph_0$ だから

$$|X| = |(X \setminus Y) \cup Y| = |X \setminus Y| + |Y| = |X \setminus Y| + |Y| + \aleph_0 = |X| + \aleph_0.$$

(6 $\implies$ 6) $\aleph_0 = \aleph_0 + 1$ だから

$$|X| = |X| + \aleph_0 = |X| + \aleph_0 + 1 = |X| + 1.$$

(7 $\implies$ 1) X に含まれない元 ∞ を一つ取る． $|X| = |X| + 1$ より全単射 $f: X \cup \{\infty\} \rightarrow X$ が存在する．このとき $f(X) \subsetneq X$ かつ $|f(X)| = |X|$ である． $\square$

定理．選択公理を仮定する．無限集合は Dedekind 無限である．

証明．整列可能定理を使えば明らか．

直接示すには「選択公理 $\implies$ 整列可能定理」の証明を真似ればよい． X を無限集合とする．命題により単射 $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ の存在を示せばよい．選択公理により $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ の選択関数 g が存在する．このとき $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ を帰納的に $f(n) := g(X \setminus \{g(0), g(1), \dots, g(n-1)\})$ で定義すればよい．

X が無限集合であるから， $X \setminus \{g(0), g(1), \dots, g(n-1)\} \neq \emptyset$ となることに注意する．

$\square$

実は，この命題は可算選択公理があれば証明できる．

定理．可算選択公理を仮定する．無限集合は Dedekind 無限である．

証明． X を無限集合とする．命題により可算無限部分集合 $Y \subset X$ の存在を示せばよい．非負整数 n に対し $X_n := \{\langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle \in X^{n+1} \mid i \neq j \text{ ならば } x_i \neq x_j\}$ と置く． X が無限集合だから $X_n \neq \emptyset$ である．そこで集合族 $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ に可算選択公理を適用して選択関数 $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ を得る． $\varphi(n) \in X_n \subset X^n$ だから $\varphi(n) = \langle x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)} \rangle$ と書ける． $Y := \{x_i^{(n)} \mid i \leq n\}$ と置けば， $A := \{\langle i, n \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i \leq n\}$ は可算無限集合だから Y は高々可算集合である．しかし X_n の定義から明らかに Y は無限集合である．従って $Y \subset X$ は可算無限部分集合である． $\square$

定理. 任意の無限集合 X に対し $|X| + |X| = |X|$

⇒ 無限集合は Dedekind 無限集合

証明. X を無限集合とすると仮定より全単射 $f : (\{0\} \times X) \cup (\{1\} \times X) \rightarrow X$ が存在する. このとき明らかに $f(\{0\} \times X) \subsetneq X$ かつ $|f(\{0\} \times X)| = |X|$ である. $\square$

定理. $|X| < |Y|$ かつ $|Y| \leq^* |X|$ となるような無限集合 X, Y は存在しない

⇒ 無限集合は Dedekind 無限集合

証明. A を Dedekind 有限な無限集合とする. $A_n := \{\langle a_0, a_1, \dots, a_n \rangle \in A^{n+1} \mid i \neq j \text{ ならば } x_i \neq x_j\}$ と置いて $X := \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, $Y := X \cup \{\emptyset\}$ と置く. 明らかに $|X| \leq |Y|$, $|Y| \leq^* |X|$ である. 従って $|X| \neq |Y|$ を示せばよい.

A が Dedekind 有限であることから Y も Dedekind 有限集合である. 明らかに $|Y| = |X| + 1$ で, また命題により $|Y| \neq |Y| + 1$ である. よって $|X| \neq |Y|$ である. $\square$

最後に, 命題「無限集合は Dedekind 無限集合である」と同値な命題を述べておく. その為にまず補題を一つ示す.

補題. X を集合とする. このとき

$$\aleph_0 \leq^* |X| \iff \aleph_0 \leq \mathcal{P}(X)$$

証明. ($\implies$) $f : X \rightarrow \mathbb{N}$ を全射とする. このとき $f^{-1} : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(X)$ は単射である.

($\impliedby$) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(X)$ を単射とする. $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(X)$ を以下のように帰納的に定義する.

n を非負整数とする. $0 \leq m \leq n-1$ に対し $g(m)$ が

$$\left| \left\{ f(k) \setminus \bigcup_{m < n} g(m) \mid k \geq n \right\} \right| = \infty$$

となるように定義されているとする. このとき

$$n^* := \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid k \geq n, f(k) \setminus \bigcup_{m < n} g(m) \neq \emptyset, (X \setminus f(k)) \setminus \bigcup_{m < n} g(m) \neq \emptyset \right\}$$

として

$$g(n) := \begin{cases} f(n^*) \setminus \bigcup_{m < n} g(m) & \left(\left| \left\{ f(k) \setminus \left(f(n^*) \cup \bigcup_{m < n} g(m) \right) \mid k > n^* \right\} \right| = \infty \text{ のとき} \right) \\ X \setminus \left(f(n^*) \setminus \bigcup_{m < n} g(m) \right) & (\text{それ以外の場合}) \end{cases}$$

と定める .

このとき $h : X \rightarrow \mathbb{N}$ を

$$h(x) := \begin{cases} n & (x \in g(n) \text{ のとき}) \\ 0 & (x \in X \setminus \bigcup_{m=0}^{\infty} g(m) \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定めれば h は全射である .

□

定理. 次の命題は (ZF 上) 同値

1. 任意の無限集合は Dedekind 無限集合である .
2. Dedekind 有限集合から $\mathbb{N}$ への全射は存在しない .
3. Dedekind 有限集合の冪集合は Dedekind 有限集合である .
4. Dedekind 有限集合 X と Dedekind 無限集合 Y に対し $|X| \leq |Y|$.
5. 非可算集合 X と可算集合 Y に対し $|X \cup Y| = |X|$.
6. 非可算集合 X と可算集合 Y に対し $|X \setminus Y| = |X|$.
7. $|X| > \aleph_0$ かつ $|Y| = \aleph_0$ ならば $|X \setminus Y| > \aleph_0$.
8. 任意の集合 X に対し $\aleph_0 \leq |X|$ または $|X| \leq \aleph_0$.

証明. (1 $\implies$ 2) 仮定 1 より Dedekind 有限集合は有限集合だから明らか .

(2 $\implies$ 3) X を Dedekind 有限集合とする . 仮定 2 より $\aleph_0 \not\leq^* |X|$ だから補題により $\aleph_0 \not\leq \mathcal{P}(X)$ となる . 即ち $\mathcal{P}(X)$ は Dedekind 有限集合である .

(3 $\implies$ 1) Dedekind 有限な無限集合 X が存在すると仮定する . X が無限集合だから $\mathcal{P}(X) \ni Y \mapsto |Y| \in \mathbb{N}$ は全射である . 即ち $\aleph_0 \leq^* |\mathcal{P}(X)|$. 従って補題により $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ は Dedekind 無限集合である . 一方 X が Dedekind 有限だから仮定 3 により $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ が Dedekind 有限集合となり矛盾する .

(1 $\implies$ 4) 仮定 1 より Dedekind 有限集合は有限集合だから明らか .

(4 $\implies$ 1) X を Dedekind 有限集合とする . $\mathbb{N}$ は Dedekind 無限集合だから仮定 4 により $|X| \leq \aleph_0$. よって X が無限集合と仮定すると X は可算無限 , 即ち Dedekind 無限集合となって矛盾する .

(1 $\implies$ 5) X を非可算集合 , Y を可算集合とする . 仮定より X は Dedekind 無限集合である . $|Y \setminus X| \leq \aleph_0$ だから命題の条件 6 と 7 により

$$|X \cup Y| = |X| + |Y \setminus X| = |X|.$$

(5 $\implies$ 6) X を非可算集合 , Y を可算集合とすると $X \setminus Y$ も非可算集合である . 故に仮定 5 により $|X| = |(X \setminus Y) \cup Y| = |X \setminus Y|$.

(6 $\implies$ 7) 明らか .

(7 $\implies$ 1) X を無限集合とする . X が可算無限ならば明らかに Dedekind 無限だから , X は非可算無限集合としてよい . このとき $|X \sqcup \mathbb{N}| > \aleph_0$ だから仮定 7 により $|X| = |(X \sqcup \mathbb{N}) \setminus \mathbb{N}| > \aleph_0$. 故に X は Dedekind 無限集合である .

(1 $\iff$ 8) 明らか .

□

参考文献

- [1] Horst Herrlich, Axiom of Choice , Springer, 2006
- [2] Thomas J. Jech, The Axiom of Choice, North Holland, Amsterdam, 1973