# 可算和定理

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2014 年 9 月 27 日

命題「可算個の可算集合の和集合は可算集合」を可算和定理という．可算和定理は選択公理が無ければ証明できない．

**命題．** 選択公理 $\Longrightarrow$ 可算和定理

**証明．** $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ を可算集合の族とする．簡単のため，各 $X_n$ は可算無限集合で，$n \neq m$ ならば $X_n \cap X_m = \emptyset$ であるとする．$X_n$ が可算無限だから，$A_n := \{f \colon \mathbb{N} \longrightarrow X_n \mid f$ は全単射 $\} \neq \emptyset$ である．よって選択公理により $(f_n)_{n=0}^{\infty} \in \displaystyle\prod_{n=0}^{\infty} A_n$ を取ることができる．これを使って $f \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ を $f(n,k) := f_n(k)$ で定めれば，$f$ は全単射である． $\square$

**定理．** 「$\mathbb{R} = \displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$，$|X_n| = \aleph_0$ とは書けない」は ZF で証明できない．

**証明．** $M$ を ZFC $+$ GCH の可算推移的モデルとする．以下を満たす関数 $p$ 全体がなす集合を $\mathbb{P}$ とする．

- $\mathrm{dom}(p) \subset \omega \times \omega$，$|\mathrm{dom}(p)| < \infty$
- $\langle n, i \rangle \in \mathrm{dom}(p)$ に対して $p(n,i) \in (\omega_n)^M$．

$\mathbb{P}$ に順序を $\leq := \supset$ で入れる．

$G := \mathrm{Aut}(\omega)^{\omega}$ として，$g = (g_k)_{k \in \omega} \in G$，$p \in P$ に対して $g(p) := \{\langle n, g_n(i), \alpha \rangle \mid \langle n, i, \alpha \rangle \in p\}$ と定める．$n \in \omega$ に対して $H_n := \{g = (g_k)_{k\in\omega} \in G \mid k < n$ に対して $g_k = \mathrm{id}\}$ と定める．$\mathcal{F} := \{H \subset G \mid H$ は部分群，ある $n \in \omega$ が存在して $H_n \subset H\}$ とする．$\mathcal{F}$ は normal フィルターであることが容易に分かる．

$M$ 上 $\mathbb{P}$ ジェネリックな $\mathcal{G}$ を取り，$\mathcal{F}$ から定まる symmetric モデル $N \subset M[\mathcal{G}]$ を取る．$B_m := \{p \in \mathbb{P} \mid \mathrm{dom}(p) \subset m \times \omega\}$ と定める．$p \in B_m$，$g \in H_m$ に対して $g(p) = p$ である．

$n \in \omega$ に対して

$$\begin{aligned} \Sigma_n &:= \{\sigma \in M^{\mathbb{P}} \mid \mathrm{dom}(\sigma) \subset \check{\omega},\ \mathrm{ran}(\sigma) \subset B_n\} \\ \underline{R}_n &:= \{\langle \sigma, \mathbf{1} \rangle \mid \sigma \in \Sigma_n\} \\ \underline{X} &:= \{\langle \underline{R}_n, \mathbf{1} \rangle \mid n \in \omega\} \end{aligned}$$

とおく．$\underline{R}_n, \underline{X}$ は $\mathbb{P}$-名前である．$g \in G$，$\sigma \in \Sigma_n$ とする．$p \in B_n$ ならば $g(p) \in B_n$ だから，$g(\sigma) = \{\langle \check{m}, g(p) \rangle \mid \langle \check{m}, p \rangle \in \sigma\} \in \Sigma_n$ である．よって任意の $g \in G$ に対して $g(\underline{R}_n) = \underline{R}_n$，即ち $\mathrm{sym}(\underline{R}_n) = G$ となる．明らかに $\mathrm{dom}(\underline{R}_n) \subset \mathrm{HS}$ だから，$\underline{R}_n \in \mathrm{HS}$ である．故に $\underline{X} \in \mathrm{HS}$ も分かる．

$R_n := \mathrm{val}(\underline{R}_n, \mathcal{G})$，$X := \mathrm{val}(\underline{X}, \mathcal{G}) = \{R_n \mid n \in \omega\}$ と置く．$X \in N$ である．故に $\bigcup X = \bigcup_{n=0}^{\infty} R_n \in N$ となる．任意の実数 (即ち，$\omega$ の部分集合) $x \in N$ を取る．$\mathrm{val}(\underline{x}, \mathcal{G}) = x$ を満たす $\mathbb{P}$-名前 $\underline{x} \in \mathrm{HS}$ を取る．$\mathrm{dom}(\underline{x}) \subset \check{\omega}$ としてよい．$\underline{x} \in \mathrm{HS}$ だから，ある $n \in \omega$ が存在して $H_n \subset \mathrm{sym}(\underline{x})$ となる．よって，$\mathrm{ran}(\underline{x}) \subset B_n$ でなければならない．従って $\underline{x} \in \Sigma_n$ となり，$x = \mathrm{val}(\underline{x}, \mathcal{G}) \in R_n$ が分かる．以上により，$(2^{\omega})^N \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} R_n$ である．

よって，各 $R_n$ が $N$ で可算であることを示せばよい．定義より，$M$ の中で $|\Sigma_n| = |\mathcal{P}(\omega \times B_n)| = (2^{\omega_n})^M = (\omega_{n+1})^M$ である ($M$ で GCH が成立することに注意する)．よって $\Sigma_n = \{s_\alpha \mid \alpha \in (\omega_{n+1})^M\}$ と書ける．$\underline{h} := \{\mathrm{op}(\check{\alpha}, s_\alpha) \mid \alpha \in (\omega_{n+1})^M\}$ と置けば $h := \mathrm{val}(\underline{h}, \mathcal{G}) = \{\langle \alpha, \mathrm{val}(s_\alpha, \mathcal{G}) \rangle \mid \alpha \in (\omega_{n+1})^M\}$ は全単射 $h\colon (\omega_{n+1})^M \longrightarrow R_n$ となる．即ち，$N$ の中で $|R_n| = |(\omega_{n+1})^M|$ である．

$n \in \omega$ を取る．

$$\underline{f_n} := \{\langle \mathrm{op}(\check{i}, \check{\alpha}), p \rangle \mid i \in \omega,\ p \in \mathbb{P},\ p(n, i) = \alpha\} \in M^{\mathbb{P}}$$

とする．$g = (g_k)_{k \in \omega} \in H_{n+1}$ に対して

$$\begin{aligned} g(\underline{f_n}) &= \{\langle \mathrm{op}(\check{i}, \check{\alpha}), g(p) \rangle \mid i \in \omega,\ p \in \mathbb{P},\ p(n, i) = \alpha\} \\ &= \{\langle \mathrm{op}(\check{i}, \check{\alpha}), p \rangle \mid i \in \omega,\ p \in \mathbb{P},\ g^{-1}(p)(n, i) = \alpha\} \\ &= \{\langle \mathrm{op}(\check{i}, \check{\alpha}), p \rangle \mid i \in \omega,\ p \in \mathbb{P},\ p(n, g_n(i)) = \alpha\} \\ &= \{\langle \mathrm{op}(\check{i}, \check{\alpha}), p \rangle \mid i \in \omega,\ p \in \mathbb{P},\ p(n, i) = \alpha\} \\ &= \underline{f_n} \end{aligned}$$

だから $\underline{f_n} \in \mathrm{HS}$ である．$f_n := \mathrm{val}(\underline{f_n}, \mathcal{G}) \in N$ とすれば $f_n$ は $\omega$ から $(\omega_n)^M$ への全射である．

$\because$) 任意の $\alpha \in (\omega_n)^M$ を取る．$D := \{p \in \mathbb{P} \mid$ ある $i \in \omega$ が存在して $p(n,i) = \alpha\}$ と置けば $D \subset \mathbb{P}$ は稠密である．$\mathcal{G}$ が $M$ 上 $\mathbb{P}$-ジェネリックだから $p \in D \cap \mathcal{G}$ が取れる．このとき $p(n,i) = \alpha$ とすれば $f_n(i) = \alpha$ である．

故に $N$ において $|R_n| = |(\omega_n)^M| = \omega$ である． $\square$

**系．** 可算和定理は ZF で証明できない． $\square$

**系．** Lebesgue 測度の完全加法性は ZF で証明できない． $\square$