Constructive Order Theory と選択公理

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2012 年 4 月 15 日

定義. X を集合とする.

1. $\mathcal{P}_0(X) := \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$
2. $\mathcal{E}(X) := \big\{\{x\} \mid x \in X\big\}$
3. $\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X) := \{Y \subset X \mid Y$ は有限集合 $\}$
4. $\mathcal{P}^0_{\mathrm{fin}}(X) := \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X) \setminus \{\emptyset\}$

これらは包含関係 $\subset$ により順序集合である.

定義. $(X, \leq)$ を順序集合，$Y \subset X$ を部分順序とする.
写像 $\varphi : X \longrightarrow Y$ が contraction である $\iff$ 任意の $x \in X$ に対して $\varphi(x) \leq x$ となる.

定理 1. 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 選択公理
2. 任意の集合 X に対して，contraction $\mathcal{P}_0(X) \longrightarrow \mathcal{E}(X)$ が存在する.
3. 任意の集合 X に対して，contraction $\mathcal{P}_0(X) \longrightarrow \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X)$ が存在する.

証明. ($1 \implies 2$) X を任意の集合とする．$\mathcal{P}_0(X)$ に選択公理を適用して選択関数 $f : \mathcal{P}_0(X) \longrightarrow X$ を得る．このとき明らかに $Y \longmapsto \{f(Y)\}$ は contraction である.

($2 \implies 1$) $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を非空集合の族とする．$X := \displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ に仮定を適用して contraction $\varphi : \mathcal{P}_0(X) \longrightarrow \mathcal{E}(X)$ を得る．任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $\varphi(X_\lambda) \subset X_\lambda$ である．$\varphi(X_\lambda) \in \mathcal{E}(X)$ だから $\varphi(X_\lambda) = \{x_\lambda\}$ と書ける．$\{x_\lambda\} = \varphi(X_\lambda) \subset X_\lambda$ だから $x_\lambda \in X_\lambda$ となる．よって $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ である.

($1 \iff 3$) 同様にして AMC$\iff$3 であることが分かる. $\square$

定義. $(X, \leq)$ を順序集合，$s \in X$ を部分順序 $Y \subset X$ の上界とする．
s が Y の constructive supremum である
$\Longleftrightarrow$ ある写像 $\psi : X \longrightarrow Y$ が存在して，任意の $x \in X$ に対して「$s \leq x \Longleftrightarrow \psi(x) \leq x$」となる

命題. $(X, \leq)$ を順序集合として，$Y \subset X$ は constructive supremum $s \in X$ を持つとする．このとき s は Y の上限である．

証明. constructive supremum の定義から，ある写像 $\psi : X \longrightarrow Y$ が存在して任意の $x \in X$ に対して「$s \leq x \Longleftrightarrow \psi(x) \leq x$」となる．$t \in X$ を Y の上界とすると，上界の定義により $\psi(t) \leq t$ であるから $s \leq t$ となる．よって s は Y の最小上界である． $\square$

定理 2. 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 選択公理
2. $(X, \leq)$ を順序集合として，$Y (\neq \emptyset) \subset X$ は上限 s を持つとする．このとき s は Y の constructive supremum である．
3. $(X, \leq)$ を完備束として，$Y (\neq \emptyset) \subset X$ の上限を s とする．このとき s は Y の constructive supremum である．
4. $(X, \leq)$ を powerset lattice として，$Y (\neq \emptyset) \subset X$ の上限を s とする．このとき s は Y の constructive supremum である．

証明. $(1 \Longrightarrow 2)$ $(X, \leq)$ を順序集合，$s \in X$ を $Y (\neq \emptyset) \subset X$ の上限とする．$x \in X$ に対して

$$A_x := \begin{cases} Y & (s \leq x \text{ のとき}) \\ \{y \in Y \mid y \not\leq x\} & (s \not\leq x \text{ のとき}) \end{cases}$$

と置く．$s \not\leq x$ のとき, x は Y の上界ではないから $A_x \neq \emptyset$ である．故に集合族 $\{A_x\}_{x \in X}$ に選択公理を適用すると選択関数 $f : X \longrightarrow \displaystyle\bigcup_{x \in X} A_x \subset Y$ を得る．この f は明らかに「$s \leq x \Longleftrightarrow f(x) \leq x$」を満たす.

$2 \Longrightarrow 3$ と $3 \Longrightarrow 4$ は明らか.

$(4 \Longrightarrow 1)$ 定理 1 の条件 2 を示す．X を集合とする．$\mathcal{P}(X)$ は powerset lattice だから，$\mathcal{E}(X) \subset \mathcal{P}(X)$ の上限 X は constructive である．故にある写像 $\psi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{E}(X)$ が存在して，任意の $Y \subset X$ に対して「$X \subset Y \Longleftrightarrow \psi(Y) \subset Y$」となる．即ち「$Y \subsetneq X \Longleftrightarrow \psi(Y) \not\subset Y$」である.

$Y \in \mathcal{P}_0(X)$ に対して $\varphi(Y) := \psi(X \setminus Y) \cap Y$ と置く．$X \setminus Y \subsetneq X$ だから $\psi(X \setminus$

$Y) \not\subset X \setminus Y$ である．故に $\psi(X \setminus Y) \cap Y \neq \emptyset$ となる．$\psi(X \setminus Y) \in \mathcal{E}(X)$ だから $\psi(X \setminus Y) \cap Y \in \mathcal{E}(X)$ である．よって φ は $\mathcal{P}_0(X)$ から $\mathcal{E}(X)$ への写像であるが，定義から明らかに contraction である． $\square$

定義. 順序集合 $(X, \leq)$ が constructively directed である
$\Longleftrightarrow$ ある写像 $\varphi : \mathcal{P}^0_{\mathrm{fin}}(X) \longrightarrow X$ が存在して，任意の $Y \in \mathcal{P}^0_{\mathrm{fin}}(X)$ に対して $\varphi(Y)$ は Y の上界である．(この写像 φ を constructtive direction と呼ぶ)

定理 3. 選択公理 $\Longleftrightarrow$ 任意の有向集合は constructively directed である．

証明. ($\Longrightarrow$) $(X, \leq)$ を有向集合とする．$Y \in \mathcal{P}^0_{\mathrm{fin}}(X)$ に対して $A_Y := \{x \in X \mid x$ は Y の上界 $\}$ と置き $\{A_Y\}_{Y \in \mathcal{P}^0_{\mathrm{fin}}(X)}$ に選択公理を適用すればよい．

($\Longleftarrow$) $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を互いに素な非空集合の族とする．Λ は無限集合であるとしてよい．$X := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ として $\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X) \mid$ 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $|A \cap X_\lambda| \leq 1\}$ と置く．$\mathcal{A} \cap \Lambda = \emptyset$ としてよい．このとき $S := \mathcal{A} \cup \Lambda$ の順序 $\leq$ を，$s, t \in S$ に対して

$$s < t \Longleftrightarrow \begin{cases} s, t \in \mathcal{A} \text{ かつ } \{\lambda \in \Lambda \mid s \cap X_\lambda \neq \emptyset\} \subsetneq \{\lambda \in \Lambda \mid t \cap X_\lambda \neq \emptyset\} \\ \text{または } s \in \Lambda,\ t \in \mathcal{A} \text{ かつ } |t \cap X_s| = 1 \end{cases}$$

で定義する．このとき $(S, \leq)$ は有向集合である．

$\because$) 任意の $s, t \in S$ に対して，ある $u \in S$ が存在して $s \leq u,\ t \leq u$ とできることを示せばよい．

$A, B \in \mathcal{A}$ とする．A, B は有限集合で Λ は無限集合だから，ある $\mu \in \Lambda$ が存在して $X_\mu \cap (A \cup B) = \emptyset$ とできる．$\Lambda_A := \{\lambda \in \Lambda \mid A \cap X_\lambda = \emptyset\}$ と置く．$x \in X_\mu$ を一つ取り $C := A \cup \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda_A} (B \cap X_\lambda)\right) \cup \{x\}$ とすれば $C \in \mathcal{A},\ A \leq C,\ B \leq C$ である．

$\lambda, \mu \in \Lambda$ とする．$x \in X_\lambda,\ y \in X_\mu$ を取り $A := \{x, y\}$ と置く．すると明らかに $A \in \mathcal{A},\ \lambda \leq A,\ \mu \leq A$ である．

$A \in \mathcal{A},\ \lambda \in \Lambda$ とする．$\lambda \leq A$ のときは明らかだから $\lambda \not\leq A$ とする．このとき $A \cap X_\lambda = \emptyset$ である．$x \in X_\lambda$ を取り $B := A \cup \{x\}$ と置く．すると明らかに $B \in \mathcal{A},\ A \leq B,\ \lambda \leq B$ である．

以上により $(S, \leq)$ は有向集合である．

故に仮定により constructive direction $\varphi : \mathcal{P}^0_{\mathrm{fin}}(S) \longrightarrow S$ が存在する．$\lambda, \mu \in \Lambda,\ \lambda \neq \mu$ とするとき明らかに $|\varphi(\{\lambda, \mu\}) \cap X_\lambda| = 1$ である．そこで $\mu \in \Lambda$ と $x_\mu \in X_\mu$ を取り，$\lambda \neq \mu$ に対して $\varphi(\{\lambda, \mu\}) \cap X_\lambda = \{x_\lambda\}$ と書けば $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ である． $\square$

参考文献

[1] Marcel Erné, Constructive Order Theory, Mathematical Logic Quarterly 47 (2001), 211-222,
`http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/1521-3870(200105)47:2<211::AID-MALQ211>3.0.CO;2-U/abstract`