閉集合と直積と選択公理

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2015 年 7 月 11 日

定理 1. 選択公理
$\Longleftrightarrow \{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族とし，集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は任意の $\lambda\in\Lambda$ について $A_\lambda \subset X_\lambda$ を満たすとする．このとき $\overline{\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} \supset \prod_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda}$ である．

> ※ 左辺の $\overline{}$ は $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ での閉包，右辺の $\overline{}$ は各 X_λ での閉包である．
> また，逆向きの包含関係 $\overline{\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} \subset \prod_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda}$ は (選択公理によらず) 常に成り立つ．

証明. ($\Longrightarrow$) $x = (x_\lambda) \in \prod_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda}$ を取る．$\lambda\in\Lambda$ に対して $x_\lambda \in \overline{A_\lambda}$ だから，x_λ の任意の開近傍 $U \subset X_\lambda$ に対し $U \cap A_\lambda \neq \emptyset$ となる．x の任意の開近傍 $U \subset \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を取る．族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が，各 U_λ は X_λ の開集合で $\prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \subset U$ となるように取れる．このとき各 $\lambda\in\Lambda$ について $U_\lambda \cap A_\lambda \neq \emptyset$ である．従って選択公理により $\prod_{\lambda\in\Lambda}(U_\lambda \cap A_\lambda) \neq \emptyset$ となる．故に $U \cap \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \supset \prod_{\lambda\in\Lambda}(U_\lambda\cap A_\lambda) \neq \emptyset$．よって $x \in \overline{\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda}$．

($\Longleftarrow$) $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を空でない集合の族とする．$\infty \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ となる ∞ を一つ用意し，$X_\lambda := A_\lambda \cup \{\infty\}$ と置く．X_λ に密着位相を入れる．明らかに $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$．このとき

$$\overline{\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} \supset \prod_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda} = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \neq \emptyset.$$

($\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の中で考えて) $\overline{\emptyset} = \emptyset$ だから，$\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$ でなければならない． □

定理 2. 以下の命題は (ZF 上) 同値．

1. 選択公理
2. $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族とし，$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は任意の $\lambda\in\Lambda$ について $\emptyset \neq A_\lambda \subset X_\lambda$ を満たすとする．このとき
$$\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \subset \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \text{が閉集合} \Longrightarrow \text{任意の}\lambda\in\Lambda\text{に対し } A_\lambda \subset X_\lambda \text{ が閉集合}$$
3. $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族とし，$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は任意の $\lambda\in\Lambda$ について $\emptyset \neq A_\lambda \subset X_\lambda$ を満たすとする．このとき
$$\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \subset \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \text{が閉集合} \Longrightarrow \text{ある}\lambda\in\Lambda\text{に対し } A_\lambda \subset X_\lambda \text{ が閉集合}$$

証明. ($1 \Longrightarrow 2$) 定理 1 により $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \overline{\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} = \prod_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda}$ である．よって選択公理により $A_\lambda = \overline{A_\lambda}$ である．

※ 集合に関する命題を参照.

よって $A_\lambda \subset X_\lambda$ は閉集合である．

($2 \Longrightarrow 3$) 明らか．

($3 \Longrightarrow 1$) 選択公理が成り立たないと仮定すると非空集合の族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \emptyset$ となるものが存在する．$\infty \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ なる ∞ を一つ用意し，$X_\lambda := A_\lambda \cup \{\infty\}$ と定める．各 X_λ には密着位相を入れる．$\emptyset = \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ は $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の閉集合だから，仮定 3 より，ある $\lambda\in\Lambda$ が存在して $A_\lambda \subsetneq X_\lambda$ が閉集合となる．X_λ には密着位相が入っていたから，$A_\lambda = \emptyset$ でなければならず，矛盾する． □

次の命題は ZF で証明できる．

命題. $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族とし, 族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は任意の $\lambda\in\Lambda$ について $\emptyset \neq A_\lambda \subset X_\lambda$ を満たすとする．また $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$ であるとする．このとき

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \subset \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \text{が閉集合} \Longrightarrow \text{任意の}\lambda\in\Lambda\text{に対し } A_\lambda \subset X_\lambda \text{ が閉集合}$$

証明． 命題の仮定を満たす $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ と $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を取る．仮定より $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$ だから元 $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ が取れる．

ある $\mu \in \Lambda$ が存在して $A_\mu \subset X_\mu$ が閉集合でないと仮定する．$p \in \overline{A_\mu} \setminus A_\mu$ が取れる．写像 $f\colon \Lambda \longrightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を

$$f(\lambda) := \begin{cases} a_\lambda & (\lambda \neq \mu のとき) \\ p & (\lambda = \mu のとき) \end{cases}$$

と定める．明らかに $f \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ かつ $f \notin \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ である．$\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \subset \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ は閉集合だから，f の開近傍 $U \subset \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ で $U \cap \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \emptyset$ となるものが存在する．族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を，各 U_λ は X_λ の開集合で，$\prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \subset U$ となるように取る．このとき

$$\emptyset = U \cap \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \supset \prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \cap \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \supset \prod_{\lambda\in\Lambda} (U_\lambda \cap A_\lambda)$$

である．$p \in U_\mu$ かつ $p \in \overline{A_\mu}$ だから，$U_\mu \cap A_\mu \neq \emptyset$ である．そこで $q \in U_\mu \cap A_\mu$ を一つ取り，写像 $g\colon \Lambda \longrightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を

$$g(\lambda) := \begin{cases} a_\lambda & (\lambda \neq \mu のとき) \\ q & (\lambda = \mu のとき) \end{cases}$$

で定めれば，$g \in \prod_{\lambda\in\Lambda} (U_\lambda \cap A_\lambda) = \emptyset$ となり矛盾する． □

参考文献

[1] Joao Paulo C. de Jesus and Samuel G. da Silva, Closed products of sets and the axiom of choice, Acta Mathematica Hungarica, Volume 133, Numbers 1–2, 128–132, `http://www.springerlink.com/content/c542476428j73668/`