制限された選択公理

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2012 年 1 月 1 日

選択公理とは，非空集合の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は選択関数 $f : \Lambda \longrightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を持つという命題だった．このとき，Λ や各 X_λ に制限を加えたものを考えることもできる．

定義. κ, μ を基数とする．次の二条件を満たす族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は選択関数を持つ，という命題を $\mathrm{AC}(\kappa)_\mu$ で表すことにする．

1. 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $|X_\lambda| = \kappa$
2. $|\Lambda| = \mu$

※ 添え字集合への制限を添え字に書くことにした.

また，次の二条件を満たす族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は選択関数を持つ，という命題を $\mathrm{AC}(\leq \kappa)_{\leq\mu}$ で表すことにする．

1. 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $0 < |X_\lambda| \leq \kappa$
2. $|\Lambda| \leq \mu$

同様にして $\mathrm{AC}(< \kappa)_{<\mu}$，$\mathrm{AC}(\leq \kappa)_{<\mu}$，$\mathrm{AC}(\kappa)_{\leq\mu}$ などを定義する．また，濃度の制限が無い場合は κ, μ のところに何も書かない．例えば Λ の濃度に制限が無い場合は $\mathrm{AC}(\kappa)$ となる．

$\mathrm{AC}_{\aleph_0}$ を可算選択公理 (the Axiom of Countable Choice) と呼ぶ.

これらは，$\mathrm{AC}_{<\aleph_0}$ などのような簡単な場合を除けば ZF では証明できないようだ．例えば $\mathrm{AC}(2)_\aleph$ は ZF で証明できない ([1]p71 参照) など.

命題 1. $\mathrm{AC}(2) \Longleftrightarrow \mathrm{AC}(4)$

証明. ($\Longrightarrow$) $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を 4 元集合の族とする．$\lambda\in\Lambda$ に対し $A_\lambda := \{Z\subset X_\lambda \mid |Z|=2\}$ と置く．$A := \displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ と置けば，A の各元は二元集合だから AC(2) により選択関数 $f : A \longrightarrow \displaystyle\bigcup_{Z\in A} Z = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を持つ．$\lambda\in\Lambda$ として，$x\in X_\lambda$ に対し $n_{\lambda,x} := \bigl|\{Z\in A_\lambda \mid f(Z)=x\}\bigr|$ と置く．これは $\displaystyle\sum_{x\in X_\lambda} n_{\lambda,x} = 6$ を満たす．$m_\lambda := \max\{n_{\lambda,x} \mid x\in X_\lambda\}$ と置いて $Y_\lambda := \{x\in X_\lambda \mid n_{\lambda,x} = m_\lambda\}$ とする．$|X_\lambda| = 4$ と $\displaystyle\sum_{x\in X_\lambda} n_{\lambda,x} = 6$ により $1\le |Y_\lambda| \le 3$ が成り立つ．$g : \Lambda \longrightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を

$$g(\lambda) := \begin{cases} x\in Y_\lambda\text{となる } x & (|Y_\lambda| = 1 \text{ のとき}) \\ f(Y_\lambda) & (|Y_\lambda| = 2 \text{ のとき}) \\ x\in X_\lambda\setminus Y_\lambda\text{となる } x & (|Y_\lambda| = 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定めれば g が選択関数である．

($\Longleftarrow$) $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を 2 元集合の族とする．$\lambda\in\Lambda$ に対し $A_\lambda := X_\lambda\times\{0,1\}$ と置けば $|A_\lambda| = 4$ だから AC(4) により選択関数 $f : \Lambda \longrightarrow \displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ が存在する．そこで π を第一成分への射影として $g := \pi\circ f : \Lambda \longrightarrow \displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ とすれば明らかに g が選択関数である． □

命題 1 の $\Longleftarrow$ は明らかに次のように一般化できる．

命題 2. 正整数 k, n に対し $\mathrm{AC}(kn) \Longrightarrow \mathrm{AC}(n)$.

> ※ 一般に $\mathrm{AC}(m) \Longrightarrow \mathrm{AC}(n)$ は成立するとは限らない．例えば $m=2$ のとき，$\mathrm{AC}(2) \Longrightarrow \mathrm{AC}(n)$ が成立する $n>1$ は $n=2,4$ だけであることが知られている．これにより $\mathrm{AC}(4) \Longrightarrow \mathrm{AC}(3)$ が成立しないことも分かる．何故ならば，成立すると仮定すると $\mathrm{AC}(2) \Longleftrightarrow \mathrm{AC}(4)$ により $\mathrm{AC}(2) \Longrightarrow \mathrm{AC}(3)$ が成立してしまい，矛盾するからである．

命題 1 の $\Longrightarrow$ は以下のように一般化され，命題 5 を得ることができる．

補題 3. p を素数，$n>p$ を p の倍数として AC(p) を仮定する．このとき n 元集合の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対し集合族 $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で各 $\lambda\in\Lambda$ に対し $\emptyset \neq Y_\lambda \subsetneq X_\lambda$ となるものが存在する．

証明. $A_\lambda := \{Z\subset X_\lambda \mid |Z| = p\}$ と置き $A := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ とする．A の各元は p 元集合だから AC(p) により選択関数 f を持つ．

$\lambda \in \Lambda$ とする．$x \in X_\lambda$ に対し $n_{\lambda,x} := |\{Z \in A_\lambda \mid f(Z) = x\}|$ とする．$m_\lambda := \max\{n_{\lambda,x} \mid x \in X_\lambda\}$ と置く．$Y_\lambda := \{x \in X_\lambda \mid n_{\lambda,x} = m_\lambda\}$ と置けば $\emptyset \neq Y_\lambda \subset X_\lambda$ である．このとき $Y_\lambda \subsetneq X_\lambda$ が成立する

$\because$) $|A_\lambda| = {}_nC_p$ であるから $\displaystyle\sum_{x \in X_\lambda} n_{\lambda,x} = {}_nC_p = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}$ となる．$n-1, \cdots, n-p+1$ は p で割れないから $\displaystyle\sum_{x \in X_\lambda} n_{\lambda,x}$ は n で割り切れない．よって「任意の $x \in X_\lambda$ に対し $n_{\lambda,x} = m_\lambda$」はありえない．故に $Y_\lambda \neq X_\lambda$ である．

$\square$

補題 4. n を正整数とする．「任意の素数 $p \leq n$ に対し $\mathrm{AC}(p)$ が成り立つ」ならば「任意の正整数 $k \leq n$ に対し $\mathrm{AC}(k)$ が成り立つ」．

証明. n についての帰納法．$n = 1$ のときは明らか．$n > 1$ とする．任意の素数 $p \leq n$ に対し $\mathrm{AC}(p)$ が成り立つとする．帰納法の仮定により任意の $1 \leq k \leq n-1$ に対し $\mathrm{AC}(k)$ が成り立つ．故に $\mathrm{AC}(n)$ を示せば証明が終わる．

(i) n が素数のとき．仮定により $\mathrm{AC}(n)$ が成り立つから示すべきことは何も無い．

(ii) n が合成数のとき．$\mathrm{AC}(n)$ を示すため，$\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を n 元集合の族とする．$1 \leq k \leq n-1$ に対し $A^{(k)}_\lambda := \{Z \subset X_\lambda \mid |Z| = k\}$ と置き $A^{(k)} := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A^{(k)}_\lambda$ とする．$\mathrm{AC}(k)$ を $A^{(k)}$ に適用して選択関数 $f^{(k)}$ を得る．

n を割る最小の素数を p とすると，補題 3 により集合族 $\{Y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ で各 $\lambda \in \Lambda$ に対し $\emptyset \neq Y_\lambda \subsetneq X_\lambda$ となるものが取れる．勿論 $1 \leq |Y_\lambda| \leq n-1$ である．そこで $f(\lambda) := f^{(|Y_\lambda|)}(Y_\lambda)$ と置けば f が $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の選択関数である．故に $\mathrm{AC}(n)$ が成り立つ． $\square$

命題 5. n を正整数とする．「任意の素数 $p \leq n$ に対し $\mathrm{AC}(p)$ が成り立つ」ならば「任意の合成数 $k \leq 2n+1$ に対し $\mathrm{AC}(k)$ が成り立つ」．

証明. 補題 4 により任意の $1 \leq m \leq n$ に対し $\mathrm{AC}(m)$ が成り立つ．

$k \leq 2n+1$ を合成数とする．$\mathrm{AC}(k)$ を示すため，$\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を k 元集合の族とする．$1 \leq m \leq n$ に対し $A^{(m)}_\lambda := \{Z \subset X_\lambda \mid |Z| = m\}$ と置き $A^{(m)} := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A^{(m)}_\lambda$ とする．$\mathrm{AC}(m)$ を $A^{(m)}$ に適用して選択関数 $f^{(m)}$ を得る．

k を割る最小の素数を p とすると，明らかに $p \leq n$ だから $\mathrm{AC}(p)$ が成り立つ．よって補題 3 により集合族 $\{Y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ で各 $\lambda \in \Lambda$ に対し $\emptyset \neq Y_\lambda \subsetneq X_\lambda$ となるものが取れる．勿

論 $1 \leq |Y_\lambda| \leq k-1 \leq 2n$ である．そこで

$$f(\lambda) := \begin{cases} f^{(|Y_\lambda|)}(Y_\lambda) & (1 \leq |Y_\lambda| \leq n \text{ のとき}) \\ f^{(|X_\lambda \setminus Y_\lambda|)}(X_\lambda \setminus Y_\lambda) & (n+1 \leq |Y_\lambda| \leq k-1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と置けば f が $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の選択関数である．故に AC(k) が成り立つ． □

命題 5 で $n=2$ とすれば先の AC(2) $\Longrightarrow$ AC(4) が得られる．また $n=4$ とすれば AC(2) かつ AC(3) から AC(6)，AC(8)，AC(9) が得られることが分かる．

命題 6. AC(2) かつ AC(5) $\Longrightarrow$ AC(8)

証明. AC(2) と AC(5) を仮定する．命題 1 により AC(4) が成り立つ．$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を 8 元集合の族とする．$p=2$ として補題 3 を適用すると集合族 $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で各 $\lambda \in \Lambda$ に対し $\emptyset \neq Y_\lambda \subsetneq X_\lambda$ となるものが存在する．勿論 $1 \leq |Y_\lambda| \leq 7$ である．

次に自然数 n に対し $A_\lambda^{(n)} := \{Z \subset X_\lambda \mid |Z| = n\}$ と置き $A^{(n)} := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^{(n)}$ とする．AC(2)，AC(4)，AC(5) をそれぞれ $A^{(2)}, A^{(4)}, A^{(5)}$ に適用して選択関数 $f^{(2)}, f^{(4)}, f^{(5)}$ を得る．

あとは，$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の選択関数 $f : \Lambda \longrightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を

$$f(\lambda) := \begin{cases} x \in Y_\lambda \text{となる } x & (|Y_\lambda| = 1 \text{ のとき}) \\ f^{(2)}(Y_\lambda) & (|Y_\lambda| = 2 \text{ のとき}) \\ f^{(5)}(X_\lambda \setminus Y_\lambda) & (|Y_\lambda| = 3 \text{ のとき}) \\ f^{(4)}(Y_\lambda) & (|Y_\lambda| = 4 \text{ のとき}) \\ f^{(5)}(Y_\lambda) & (|Y_\lambda| = 5 \text{ のとき}) \\ f^{(2)}(X_\lambda \setminus Y_\lambda) & (|Y_\lambda| = 6 \text{ のとき}) \\ x \in X_\lambda \setminus Y_\lambda \text{となる } x & (|Y_\lambda| = 7 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義すればよい． □

命題 7. AC(10) $\Longrightarrow$ AC(8)

証明. AC(10) $\Longrightarrow$ AC(2) と AC(10) $\Longrightarrow$ AC(5) により明らか． □

命題 8. AC(3) かつ AC(7) $\Longrightarrow$ AC(9)

証明. AC(3) と AC(7) を仮定する．$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を 9 元集合の族とする．

自然数 n に対し $A_\lambda^{(n)} := \{Z \subset X_\lambda \mid |Z| = n\}$ と置き $A^{(n)} := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^{(n)}$ とする．AC(3)，AC(7) をそれぞれ $A^{(3)}, A^{(7)}$ に適用して選択関数 $f^{(3)}, f^{(7)}$ を得る．

$p=3$ として補題 3 を適用すると集合族 $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で各 $\lambda\in\Lambda$ に対し $\emptyset\neq Y_\lambda\subsetneq X_\lambda$ となるものが存在する．勿論 $1\leq|Y_\lambda|\leq 8$ である．

$|Y_\lambda|=4$ となる $\lambda\in\Lambda$ を取る．$B_\lambda:=\{Z\subset Y_\lambda\mid |Z|=2\}$ と置く．$Z\in B_\lambda$ とすると $X_\lambda\setminus Z\in A^{(7)}$ だから $g(Z):=f^{(7)}(X_\lambda\setminus Z)\in X_\lambda$ を考えることができる．そこで $W_\lambda:=\{g(Z)\mid Z\in B_\lambda\}\subset X_\lambda$ と置く．$|B_\lambda|=6$ だから $1\leq|W_\lambda|\leq 6$ である．

(i) $|W_\lambda|=4$ とする．このとき

$$V_\lambda:=\{g(Z)\mid \text{ある } Z'\in B_\lambda \text{が存在して } Z\neq Z',\ g(Z)=g(Z')\}\subset X_\lambda$$

と置けば $|B_\lambda|=6$ だから $1\leq|V_\lambda|\leq 2$ となる．そこで $y_\lambda\in X_\lambda$ を

$$y_\lambda:=\begin{cases} x\in V_\lambda \text{となる } x & (|V_\lambda|=1 \text{ のとき})\\ f^{(7)}(X_\lambda\setminus V_\lambda) & (|V_\lambda|=2 \text{ のとき})\end{cases}$$

と定める．

(ii) $|W_\lambda|=5$ とする．このとき

$$V_\lambda:=\{g(Z)\mid \text{ある } Z'\in B_\lambda \text{が存在して } Z\neq Z',\ g(Z)=g(Z')\}\subset X_\lambda$$

と置けば $|B_\lambda|=6$ だから $|V_\lambda|=1$ となる．そこで $y_\lambda\in X_\lambda$ を $x\in V_\lambda$ となる x により定める．

(i)(ii) に注意して，$x_\lambda\in X_\lambda$ を

$$x_\lambda:=\begin{cases} x\in W_\lambda \text{となる } x & (|W_\lambda|=1 \text{ のとき})\\ f^{(7)}(X_\lambda\setminus W_\lambda) & (|W_\lambda|=2 \text{ のとき})\\ f^{(3)}(W_\lambda) & (|W_\lambda|=3 \text{ のとき})\\ y_\lambda & (|W_\lambda|=4 \text{ のとき})\\ y_\lambda & (|W_\lambda|=5 \text{ のとき})\\ f^{(3)}(X_\lambda\setminus W_\lambda) & (|W_\lambda|=6 \text{ のとき})\end{cases}$$

で定義する．

$|Y_\lambda|=5$ となる $\lambda\in\Lambda$ の場合も $X_\lambda\setminus Y_\lambda$ に対して同様の議論をして $x_\lambda\in X_\lambda$ を定めておく．

あとは，$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の選択関数 $f:\Lambda\longrightarrow\bigcup_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ を

$$f(\lambda):=\begin{cases} x\in Y_\lambda \text{となる } x & (|Y_\lambda|=1 \text{ のとき})\\ f^{(7)}(X_\lambda\setminus Y_\lambda) & (|Y_\lambda|=2 \text{ のとき})\\ f^{(3)}(Y_\lambda) & (|Y_\lambda|=3 \text{ のとき})\\ x_\lambda & (|Y_\lambda|=4 \text{ のとき})\\ x_\lambda & (|Y_\lambda|=5 \text{ のとき})\\ f^{(3)}(X_\lambda\setminus Y_\lambda) & (|Y_\lambda|=6 \text{ のとき})\\ f^{(7)}(Y_\lambda) & (|Y_\lambda|=7 \text{ のとき})\\ x\in X_\lambda\setminus Y_\lambda \text{となる } x & (|Y_\lambda|=8 \text{ のとき})\end{cases}$$

と定義すればよい． □

命題 9. $\mathrm{AC}_{\aleph_0}$
$\Longleftrightarrow$ 非空集合の族 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対し，ある無限集合 $M \subset \mathbb{N}$ が存在して $\prod_{n\in M} X_n \neq \emptyset$

証明. ($\Longrightarrow$) 明らか

($\Longleftarrow$) $Y_m := \prod_{n=0}^{m} X_n$ と置く．各 Y_m は空でない．$\{Y_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ に仮定を適用すると，ある無限集合 $M \subset \mathbb{N}$ が存在して $\prod_{m\in M} Y_m \neq \emptyset$ となる．即ち元 $(y_m)_{m\in M} \in \prod_{m\in M} Y_m$ が取れる．$y_m \in Y_m = \prod_{n=0}^{m} X_n$ だから $y_m = \langle x_0^m, x_1^m, \cdots, x_m^m \rangle$ と書ける．そこで $m(n) := \min\{m \in M \mid n \leq m\}$ と置けば $(x_n^{m(n)})_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ である． □

参考文献

[1] Thomas J. Jech, The Axiom of Choice, North Holland, Amsterdam, 1973

[2] W. Sierpiński, Cardinal and Ordinal Numbers, Polska Akad. Nauk Monogr. Matem. 34, Warszawa, 1958