圏論と選択公理

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2016 年 5 月 28 日

※ 圏論については『圏論の基礎』や nLab，http://alg-d.com/math/category/ などを参照.

この PDF では「圏」と書いたら特に断らない限り「小さい圏」を表すものとする．

$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を互いに素な非空集合の族とする．圏 X, Λ を次のように定める．

- まず Λ は離散圏とする．即ち $\mathrm{Ob}(\Lambda) := \Lambda$ で

$$|\mathrm{Hom}_\Lambda(\lambda,\nu)| = \begin{cases} 1 & (\lambda = \nu) \\ 0 & (\lambda \neq \nu) \end{cases}$$

- X については $\mathrm{Ob}(X) := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ として

$$|\mathrm{Hom}_X(x,y)| = \begin{cases} 1 & (\text{ある}\lambda\in\Lambda\text{について } x,y\in X_\lambda\text{となるとき}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

関手 $L\colon X \longrightarrow \Lambda$ を $Lx :=$「$x \in X_\lambda$ となる $\lambda \in \Lambda$」で定める．このように定義すれば，$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の選択関数とは L の右随伴関手のことである．

∵) $L \dashv R\colon X \longrightarrow \Lambda$ とすれば，任意の $x \in X, \lambda \in \Lambda$ に対して $\mathrm{Hom}_\lambda(Lx,\lambda) \cong \mathrm{Hom}_X(x, R\lambda)$ である．ここで $x \in X_\mu$ とすれば $\mathrm{Hom}_\lambda(\mu,\lambda) \cong \mathrm{Hom}_X(x,R\lambda)$，即ち $\mu = \lambda \Longleftrightarrow R\lambda \in X_\mu$ である．よって $R\lambda \in X_\lambda$ となり，R は選択関数である．

　逆に R を選択関数とすれば $\mathrm{Hom}_\lambda(Lx,\lambda) \cong \mathrm{Hom}_X(x,R\lambda)$ が分かる．

故に，随伴関手の存在に関する定理から選択公理を導くことができる．

定理 1. 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 選択公理

2. C, D を圏，$F\colon C \longrightarrow D$ を関手とする．任意の $d \in D$ に対して F から d への普遍射が存在するならば，F は右随伴を持つ．
3. C を余完備な圏，D を圏，$F\colon C \longrightarrow D$ を余連続な関手とする．F は solution set condition を満たすとする．このとき F は右随伴を持つ．(General Adjoint Functor Theorem)
4. C を余完備かつ co-wellpowered で, generatoring set を持つ圏, D を圏, $F\colon C \longrightarrow D$ を余連続な関手とする．このとき F は右随伴を持つ．(Special Adjoint Functor Theorem)
5. C, D, U を圏，$F\colon C \longrightarrow D$，$E\colon C \longrightarrow U$ を関手として，各 $d \in D$ に対して余極限 $\mathrm{colim}(F{\downarrow}d \to C \xrightarrow{E} U)$ が存在するとする．このとき F に沿った E の左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ が存在し，$F^\dagger E(d) \cong \mathrm{colim}(F{\downarrow}d \to C \xrightarrow{E} U)$ である．

証明. 1$\Longrightarrow$2，1$\Longrightarrow$3，1$\Longrightarrow$4，1$\Longrightarrow$5 は省略する．

(2 $\Longrightarrow$ 1) $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を互いに素な非空集合の族とする．C, D, F として，上で定義した X, Λ, L を取る．$\lambda \in \Lambda$ とすると，任意の $x \in X_\lambda$ に対して一意な射 $Lx \longrightarrow \lambda$ が普遍射である．よって L が右随伴を持つ．

(3 $\Longrightarrow$ 1) $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を互いに素な非空集合の族とする．どの X_λ にも含まれない元 $0, 1$ を取っておく．$0, 1 \notin \Lambda$ としてよい．圏 C, D を次のように定める．

- $\mathrm{Ob}(C) := \displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \cup \{0, 1\}$
- $|\mathrm{Hom}_C(x, y)| = \begin{cases} 1 & (\text{ある}\lambda \in \Lambda\text{について } x, y \in X_\lambda\text{となる}) \\ 1 & (x = 0 \text{ または } y = 1) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$
- $\mathrm{Ob}(D) := \Lambda \cup \{0, 1\}$
- $|\mathrm{Hom}_D(x, y)| = \begin{cases} 1 & (x = 0 \text{ または } y = 1 \text{ または } x = y) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$

関手 $F\colon C \longrightarrow D$ を

$$Fx := \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ 1 & (x = 1) \\ \lambda & (x \in X_\lambda) \end{cases}$$

で定める．このとき C は余完備，F は余連続で solution set condition を満たす．故に右随伴 $G\colon D \longrightarrow C$ が存在する．すると $x \in X_\mu$，$\lambda \in \Lambda$ に対して $\mathrm{Hom}_D(Fx, \lambda) \cong \mathrm{Hom}_C(x, G\lambda)$ だから，$G\lambda \in X_\lambda$ となり，G は選択関数である．

(4 $\Longrightarrow$ 1) 3$\Longrightarrow$1 と同じ圏を使用すればよい．

$(5 \Longrightarrow 1)$ $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を互いに素な非空集合の族とする．C, D, F として，上で定義した X, Λ, L を取る．また $U := X$，$E := \mathrm{id}_X$ と定める．

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "\lambda"] & \Lambda \arrow[dr, dashed, "L^\dagger \mathrm{id}_X"] & \\
L{\downarrow}\lambda \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & X \arrow[u, "L"'] \arrow[r, "\mathrm{id}_X"'] & X
\end{tikzcd}$$

任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して余極限 $\mathrm{colim}(L{\downarrow}\lambda \to X \xrightarrow{\mathrm{id}} X)$ は明らかに存在する．よって $L^\dagger \mathrm{id}_X \colon \Lambda \longrightarrow X$ が存在する．$\lambda \in \Lambda$ を取る．$X_\lambda \neq \emptyset$ だから，$x \in X_\lambda$ が取れる．このとき $Lx = \lambda$ である．自然変換 $\eta\colon \mathrm{id}_X \Longrightarrow (L^\dagger \mathrm{id}_X) \circ L$ から射 $\eta_x \colon x \longrightarrow L^\dagger \mathrm{id}_X(Lx) = L^\dagger \mathrm{id}_X(\lambda)$ が得られる．よって圏 X の定義から $L^\dagger \mathrm{id}_X(\lambda) \in X_\lambda$ でなければならない． $\square$

$X^{\mathrm{op}} = X$，$\Lambda^{\mathrm{op}} = \Lambda$ であるから，選択関数は $L\colon X \longrightarrow \Lambda$ の左随伴関手であることも分かる．よって，先の命題の双対も選択公理と同値である．即ち

定理 2. 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 選択公理
2. C, D を圏，$G\colon D \longrightarrow C$ を関手とする．任意の $c \in C$ に対して c から G への普遍射が存在するならば，G は左随伴を持つ.
3. C を圏，D を完備な圏，$G\colon D \longrightarrow C$ を連続な関手とする．F は solution set condition を満たすとする．このとき G は左随伴を持つ.
4. C を圏, D を完備かつ wellpowered で, cogeneratoring set を持つ圏, $G\colon D \longrightarrow C$ を連続な関手とする．このとき G は左随伴を持つ.
5. C, D, U を圏，$F\colon C \longrightarrow D$，$E\colon C \longrightarrow U$ を関手として，各 $d \in D$ に対して極限 $\lim(d{\downarrow}F \to C \xrightarrow{E} U)$ が存在するとする．このとき F に沿った E の右 Kan 拡張 $F^\ddagger E$ が存在し，$F^\ddagger E(d) \cong \lim(d{\downarrow}F \to C \xrightarrow{E} U)$ である． $\square$

定義. 圏 C が骨格的 (skeletal) $\Longleftrightarrow$ $f\colon c \longrightarrow d$ が同型射ならば $c = d$.

定義. 圏 C の骨格的な充満部分圏 $S \subset C$ で「任意の $c \in C$ に対してある $s \in S$ が存在して $c \cong s$ となる」を満たすものを C の骨格 (skeleton) という.

定理 3. 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 選択公理

2. 任意の圏は骨格を持つ.

3. 圏の骨格は (もし存在するならば) 同型を除いて一意である.

証明. ($1 \Longrightarrow 2$) C を圏とする．選択公理により，商集合 $\mathrm{Ob}(C)/\cong$ の完全代表系 S を取る．S を充満部分圏 $S \subset C$ と見なせば，S が骨格である.

($2 \Longrightarrow 1$) $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を互いに素な非空集合の族とする．上で定義した圏 X の骨格 S を取れば，明らかに $\mathrm{Ob}(S)$ が $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の選択集合である.

($1 \Longrightarrow 3$) C を圏，$S, T \subset C$ を骨格とする．$s \in S$ とすると，T が骨格だから $Fs \in T$ が一意に存在して $s \cong Fs$ となる．このとき $A_s := \{f\colon s \longrightarrow Fs \mid f \text{ は同型射 }\} \neq \emptyset$ である．よって選択公理により $(f_s)_{s\in S} \in \displaystyle\prod_{s\in S} A_s$ を取ることができる．$f\colon s_0 \longrightarrow s_1$ に対して $Ff\colon Fs_0 \longrightarrow Fs_1$ を $Ff := f_{s_1} \circ f \circ f_{s_0}^{-1}$ により定めれば，$F\colon S \longrightarrow T$ は関手である.

$$\begin{tikzcd} s_0 \arrow[r, "f_{s_0}"] \arrow[d, "f"'] & Fs_0 \arrow[d, dashed, "Ff"] \\ s_1 \arrow[r, "f_{s_1}"'] & Fs_1 \end{tikzcd}$$

この F が圏同型である.

($3 \Longrightarrow 1$) 選択公理と同値な次の命題を示す.

> 非空集合の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$は全ての X_λの濃度が等しいとする.
> このときある$\lambda_0 \in \Lambda$と写像の族 $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$が存在して
> 「各$\lambda \in \Lambda$に対して $f_\lambda\colon \mathrm{Aut}(X_{\lambda_0}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(X_\lambda)$ は群同型」を満たす.

※ 証明は集合に関する命題を参照.

$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を非空集合の族で，$\lambda \neq \mu$ に対して $|X_\lambda| = |X_\mu|$ であるとする．$\lambda_0 \in \Lambda$ を一つ取る．圏 C を $\mathrm{Ob}(C) := \Lambda \times \{0, 1\}$ で

$$\mathrm{Hom}_C(\langle\lambda, i\rangle, \langle\mu, j\rangle) = \begin{cases} \mathrm{Bij}(X_{\lambda_0}, X_{\lambda_0}) & (i = j = 0,\ \lambda = \mu) \\ \mathrm{Bij}(X_\lambda, X_\lambda) & (i = j = 1,\ \lambda = \mu) \\ \mathrm{Bij}(X_{\lambda_0}, X_\lambda) & (i = 0,\ j = 1,\ \lambda = \mu) \\ \mathrm{Bij}(X_\lambda, X_{\lambda_0}) & (i = 1,\ j = 0,\ \lambda = \mu) \\ \emptyset & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

但し，$\mathrm{Bij}(X, Y) := \{f\colon X \longrightarrow Y \mid f \text{ は全単射 }\}$

により定める．$i = 0, 1$ に対して $C_i := \Lambda \times \{i\}$ と置けば，明らかに $C_0, C_1 \subset C$ は骨格である．故に仮定 3 により圏同型 $F\colon C_0 \longrightarrow C_1$ が存在する．関手 F から全単射 $F_\lambda\colon \operatorname{Aut}(X_{\lambda_0}) \longrightarrow \operatorname{Aut}(X_\lambda)$ が得られる． □

定義. C を圏，$i, p \in \operatorname{Mor}(C)$ を射とする．i が p に対して left lifting property を持つ，もしくは p が i に対して right lifting property を持つとは，任意の可換図式

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & x \arrow[d, "p"] \\ b \arrow[r, "g"'] & y \end{tikzcd}$$

に対して射 $h\colon b \longrightarrow x$ が存在して，次の図式が可換となることである．

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & x \arrow[d, "p"] \\ b \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & y \end{tikzcd}$$

定義. C を (小さいとは限らない) 圏，$L, R \subset \operatorname{Mor}(C)$ を部分クラスとする．(L, R) が C の weak factorization system であるとは，以下の条件を満たすことを言う．

1. 任意の $f \in \operatorname{Mor}(C)$ に対してある $i \in L$，$p \in R$ が存在して $f = p \circ i$ と書ける．
2. $i \in L \Longleftrightarrow i$ は任意の $p \in R$ に対して left lifting property を持つ．
3. $p \in R \Longleftrightarrow p$ は任意の $i \in L$ に対して right lifting property を持つ．

命題 4. $(L, R_0), (L, R_1)$ が圏 C の weak factorization system ならば $R_0 = R_1$ である．

証明. $p \in R_0$ とする．(L, R_0) が weak factorization system だから，任意の $i \in L$ に対して right lifting property を持つ．よって，(L, R_1) が weak factorization system だから，$p \in R_1$ となる．即ち $R_0 \subset R_1$ である．同様にして $R_1 \subset R_0$ だから $R_0 = R_1$ となる． □

定義. $\mathrm{Mono}, \mathrm{Epi}, \mathrm{SplitEpi} \subset \operatorname{Mor}(\mathbf{Set})$ を以下のように定義する．

$$\begin{aligned} \mathrm{Mono} &:= \{ f \in \operatorname{Mor}(\mathbf{Set}) \mid f \text{ は単射 } \} \\ \mathrm{Epi} &:= \{ f \in \operatorname{Mor}(\mathbf{Set}) \mid f \text{ は全射 } \} \\ \mathrm{SplitEpi} &:= \{ f \in \operatorname{Mor}(\mathbf{Set}) \mid f \text{ は全射で，ある写像 } g \text{ が存在して } f \circ g = \mathrm{id} \text{ となる } \} \end{aligned}$$

命題 5. (Epi, Mono) は **Set** の weak factorization system である．

証明. 省略 □

命題 6. (Mono, SplitEpi) は **Set** の weak factorization system である．

証明. 任意の写像 f が $f = e \circ m$，$m \in \mathrm{Mono}$，$e \in \mathrm{SplitEpi}$ と分解できることは容易に分かる．

$m \in \mathrm{Mono}$，$e \in \mathrm{SplitEpi}$ として任意の可換図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "m"'] & X \arrow[d, "e"] \\ B \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

を考える．$m\colon A \longrightarrow B$ は単射だから $A \subset B$ としてよい．また $e \in \mathrm{SplitEpi}$ だから，ある写像 $s\colon Y \longrightarrow X$ が存在して $e \circ s = \mathrm{id}_Y$ となる．写像 $h\colon B \longrightarrow X$ を，$b \in B$ に対して

$$h(b) := \begin{cases} f(b) & (b \in A \text{ のとき}) \\ s \circ g(b) & (b \in B \setminus A \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める．このとき明らかに $h \circ m = f$ である．また $b \in A$ のとき

$$e \circ h(b) = e(h(b)) = e(f(b)) = g(b)$$

であり，$b \in B \setminus A$ のとき

$$e \circ h(b) = e(h(b)) = e(s(g(b))) = g(b)$$

となるから $e \circ h = g$ である．以上により $m \in \mathrm{Mono}$ が $e \in \mathrm{SplitEpi}$ に対して left lifting property を持つ (即ち $e \in \mathrm{SplitEpi}$ が $e \in \mathrm{Mono}$ に対して right lifting property を持つ) ことが分かる．

写像 $f\colon X \longrightarrow Y$ が任意の $e \in \mathrm{SplitEpi}$ に対して left lifting property を持つとする．次の実線は可換である．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{id}_X"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "e"] \\ Y \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "h"] & \{*\} \end{tikzcd}$$

明らかに $e \in \mathrm{SplitEpi}$ だから, 写像 $h\colon Y \longrightarrow X$ が存在して可換となる．即ち $\mathrm{id}_X = h \circ f$ だから f は単射である．

写像 $f\colon X \longrightarrow Y$ が任意の $m \in \mathrm{Mono}$ に対して right lifting property を持つとする．次の実線は可換である．

$$\begin{tikzcd}
\emptyset \arrow[r] \arrow[d, "m"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, "\mathrm{id}_Y"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & Y
\end{tikzcd}$$

$m \in \mathrm{Mono}$ だから，写像 $h\colon Y \longrightarrow X$ が存在して可換となる．即ち $\mathrm{id}_Y = f \circ h$ だから $f \in \mathrm{SplitEpi}$ である． □

定理 7. 選択公理 $\Longleftrightarrow$(Mono, Epi) は **Set** の weak factorization system である．

証明.「任意の全射 $F\colon X \longrightarrow Y$ に対して，ある $G\colon Y \longrightarrow X$ が存在して $F \circ G = \mathrm{id}_Y$」が選択公理と同値であった．故に命題 4 と命題 6 から明らか． □

定義. C, D を圏とする．C から D への anafunctor とは組 $F = \langle |F|, \widehat{F}, F \rangle$ であって以下を満たすものを言う．

1. $|F|$ は圏である．
2. $\widehat{F}\colon |F| \longrightarrow C$，$F\colon |F| \longrightarrow D$ は関手である．
3. $\widehat{F}$ は忠実充満で，対象について全射である．

記号で $F\colon C \xrightarrow{\mathrm{a}} D$ で表す．

定義. $F, G\colon C \xrightarrow{\mathrm{a}} D$ を anafunctor とする．F から G への自然変換とは，次の図式の自然変換 φ のことをいう．($|F| \times_C |G|$ は $\widehat{F}$ と $\widehat{G}$ の pullback である．)

$$\begin{tikzcd}
 & {|F|} \arrow[dl, "\widehat{F}"'] \arrow[rr, bend left, "F"] & & \\
C & & {|F| \times_C |G|} \arrow[ul] \arrow[dl] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & D \\
 & {|G|} \arrow[ul, "\widehat{G}"] \arrow[rru, bend right, "G"'] & &
\end{tikzcd}$$

$F\colon C \longrightarrow D$ を関手とするとき，$C \xleftarrow{\mathrm{id}} C \xrightarrow{F} D$ により F を anafunctor $F\colon C \xrightarrow{\mathrm{a}} D$ とみなすことができる．

定理 8. 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 選択公理
2. 関手 $F\colon C \longrightarrow D$ が圏同値 $\Longleftrightarrow$ F が忠実充満かつ本質的全射
3. 任意の anafunctor $F\colon C \xrightarrow{\mathrm{a}} D$ に対して，ある関手 $G\colon C \longrightarrow D$ が存在して $F \cong G$ となる．

証明. $(1 \Longrightarrow 2)$ 省略.

$(2 \Longrightarrow 3)$ $F\colon C \xrightarrow{\mathrm{a}} D$ を anafunctor とする．$\widehat{F}$ は忠実充満かつ本質的全射だから，仮定 2 より関手 $K\colon C \longrightarrow |F|$ で $\widehat{F}K \cong \mathrm{id}_C$，$K\widehat{F} \cong \mathrm{id}_{|F|}$ となるものが存在する．$G := FK$ とする．

$$\begin{tikzcd}
{|F|} \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\widehat{F}"'] & & {|F|} \arrow[dr, "F"] & \\
& C \arrow[u, phantom, "\Downarrow\wr"] \arrow[ur, "K"'] \arrow[rr, "G"'] & & D
\end{tikzcd}$$

このとき $F \cong G\widehat{F}$ だから，anafunctor として $F \cong G$ である．

$$\begin{tikzcd}
& {|F|} \arrow[dl, "\widehat{F}"'] \arrow[drrr, bend left, "F"] & & & \\
C & & {|F|} \arrow[ul, "\mathrm{id}"'] \arrow[dl, "\widehat{F}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\wr"] & & D \\
& C \arrow[ul, "\mathrm{id}"] \arrow[urrr, bend right, "G"'] & & &
\end{tikzcd}$$

$(3 \Longrightarrow 1)$ $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を互いに素な非空集合として，最初に述べたように圏 X, Λ と関手 $L\colon X \longrightarrow \Lambda$ を取る．$\Lambda \xleftarrow{L} X \xrightarrow{\mathrm{id}} X$ は anafunctor $F\colon \Lambda \xrightarrow{\mathrm{a}} X$ を定めるから，ある関手 $G\colon \Lambda \longrightarrow X$ が存在して $F \cong G$ となる．即ち自然同型 $\varphi\colon \mathrm{id} \Longrightarrow GL$ が存在する．

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "L"'] \arrow[drrr, bend left, "\mathrm{id}"] & & & \\
\Lambda & & X \arrow[ul, "\mathrm{id}"'] \arrow[dl, "L"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & & X \\
& \Lambda \arrow[ul, "\mathrm{id}"] \arrow[urrr, bend right, "G"'] & & &
\end{tikzcd}$$

$\lambda \in \Lambda$ に対して $x \in X_\lambda$ を取れば $G(\lambda) = G(L(x)) = \mathrm{id}(x) = x \in X_\lambda$ となるから G は選択関数である． □

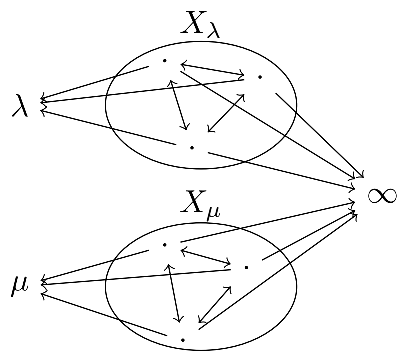
定理 9. 選択公理
$\Longleftrightarrow$ C を圏，$x \in C$ を対象とする．任意の $a \in C$ に対して直積 $a \times x$ が存在するならば，関手 $F\colon C \longrightarrow C$ で「任意の $a \in C$ に対して $Fa \cong a \times x$」となるものが存在する．

証明. ($\Longrightarrow$) 省略.

($\Longleftarrow$) $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を互いに素な非空集合の族とする．$\Lambda \cap \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = \emptyset$ としてよい．$\infty \notin \Lambda \cup \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ となる元 ∞ を一つ取り，圏 C を以下のように定める．

- $\mathrm{Ob}(C) := \{\infty\} \cup \Lambda \cup \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$.
- $a, b \in C$ に対して以下のように定める．

$$\mathrm{Hom}_C(a,b) := \begin{cases} 1 & (a = b \text{ のとき}) \\ 1 & (b \in \Lambda,\ a \in X_b \text{のとき}) \\ 1 & (b = \infty,\ a \in X_\lambda \text{のとき}) \\ 1 & (\text{ある } \lambda \in \Lambda \text{ に対して } a, b \in X_\lambda \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$



このとき明らかに，任意の $a \in C$ に対して直積 $a \times \infty$ が存在する．(特に $\lambda \in \Lambda$ に対して $\lambda \times \infty \in X_\lambda$ である．) よって仮定により関手 $F\colon C \longrightarrow C$ で，任意の $a \in C$ に対して $Fa \cong a \times \infty$ となるものが存在する．このとき $F(\lambda) \in X_\lambda$ となるから $F|_\Lambda\colon \Lambda \longrightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ が選択関数である． □