基数のなす順序集合

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2016 年 5 月 21 日

選択公理の下では，基数全体がなすクラスは「整列」されているのであった．では選択公理がなかった場合はどうなるのであろうか? 実は「任意の順序が実現されうる」のである．

定理 1. $(I, \leq)$ を順序集合とする．ZF において次の命題を仮定しても矛盾しない: ある集合 $\{S_i \mid i \in I\}$ が存在して，$i, j \in I$ に対して「$i \leq j \Longleftrightarrow |S_i| \leq |S_j|$」となる．

証明. permutation モデルを構成する．$(I, \leq) \in R_\infty(\emptyset)$ を順序集合とする．単射 $I \ni i \longmapsto \{j \in I \mid j \leq i\} \in \mathcal{P}(I)$ により $(I, \leq)$ は $(\mathcal{P}(I), \subset)$ に埋め込まれるから，$(\mathcal{P}(I), \subset)$ に対して主張を証明すればよい．

$|A| = |I| \cdot \aleph_0$ と仮定し，$A = \{a_{in} \mid i \in I,\ n \in \omega\}$ と書く．$p \subset I$ に対して $S_p = \{a_{in} \mid i \in p,\ n \in \omega\}$ と置く．以下を満たす permutation モデル V を構成すればよい．

- $\{S_p \mid p \subset I\} \in V$.
- 関数 h を $h(p) := S_p$ で定義すると $h \in V$.
- $p \subset q \Longleftrightarrow |S_p| \leq |S_q|$.

$G := \{g \in \mathrm{Aut}(A) \mid 任意の\ i \in I\ に対して\ g(S_{\{i\}}) = S_{\{i\}}\}$ として normal イデアル $\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(A) \subset \mathcal{P}(A)$ から定まる permutation モデルを V とする．

まず任意の $g \in G$ に対して $g(S_p) = S_p$ だから $\mathrm{sym}(S_p) = G$，$\mathrm{sym}(h) = h$ である．よって $\{S_p \mid p \subset I\} \in V$，$h \in V$ である．

また $p \subset q$ ならば $S_p \subset S_q$ だから $|S_p| \leq |S_q|$ となる．

$p \not\subset q$ かつ $|S_p| \leq |S_q|$ と仮定する．単射 $f\colon S_p \longrightarrow S_q$ で $f \in V$ となるものを取る．ある $E \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(A)$ が存在して $\mathrm{fix}(E) \subset \mathrm{sym}(f)$ となる．$i \in p \setminus q$ を取り，$m \neq n$ を

$a_{im}, a_{in} \notin E$ となるように取る．$g \in G$ を

$$g(a_{ik}) := \begin{cases} a_{in} & (k = m \text{ のとき}) \\ a_{im} & (k = n \text{ のとき}) \\ a_{ik} & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

で定義すると $g \in \mathrm{fix}(E) \subset \mathrm{sym}(f)$ だから $g(f) = f$ となる．

$f(a_{im}) \in S_q$ だから，$f(a_{im}) = a_{jl}$ と書けば $j \in q$ となり $j \neq i$ なので $g(a_{jl}) = a_{jl}$ である．一方，

$$f(a_{in}) = f(g(a_{im})) = g(f)(g(a_{im})) = f(a_{im}) = a_{jl}$$

となるから f が単射であることに矛盾する． $\square$

参考文献

[1] Thomas J. Jech, the Axiom of Choice, Dover Books on Mathematics, 2008