集合の濃度と選択公理

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2013 年 7 月 7 日

以下の命題の証明は順序数・濃度の簡単なまとめを参照.

命題 1. 任意の濃度 κ, λ について
$\kappa \leq \lambda \iff$ ある濃度 μ が存在して $\kappa + \mu = \lambda$ $\square$

命題 2. 濃度 $\kappa, \lambda \geq 2$ に対し $\kappa + \lambda \leq \kappa \cdot \lambda$. $\square$

命題 3. $\aleph_0 \leq \kappa$ ならば $2^\kappa - \kappa = 2^\kappa$. $\square$

命題 4. 任意のアレフ $\aleph$ に対して $\aleph^2 = \aleph$. $\square$

命題 5. 任意のアレフ $\aleph, \aleph'$ に対し $\aleph \cdot \aleph' = \aleph + \aleph' = \max\{\aleph, \aleph'\}$. $\square$

命題 6. 濃度 κ, λ, μ とアレフ $\aleph$ が $\kappa \cdot \aleph \leq \lambda + \mu$ を満たすとき, $\kappa \leq \mu$ または $\aleph \leq \lambda$. $\square$

命題 7. 濃度 κ, λ, μ とアレフ $\aleph$ が $\kappa \cdot \lambda \leq \aleph + \mu$ を満たすとき, $\kappa \leq \aleph$ または $\lambda \leq \mu$. $\square$

命題 8. 濃度 κ, λ とアレフ $\aleph$ が $\aleph \leq \kappa \cdot \lambda$ を満たすとき, $\aleph \leq \kappa$ または $\aleph \leq \lambda$ である. $\square$

命題 9. $\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X) := \{Y \subset X \mid Y$ は有限集合 $\}$ と置くと, 整列可能な無限集合 X に対し $|X| = |\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X)|$. $\square$

命題 10. $\Gamma(X) := \{\alpha \mid \alpha$ は順序数, $|\alpha| \leq |X|\}$ と置く. この Γ を Hartogs 関数という. また $\kappa = |X|$ のとき $\kappa^* := |\Gamma(X)|$ と書く. これを Hartogs number という. Hartogs number はアレフである.

1. $\Gamma(X)$ は $|\alpha| \not\leq |X|$ となるような順序数 α のうち最小の順序数である.
2. κ^* は $\aleph \not\leq \kappa$ となるようなアレフ $\aleph$ のうち最小のアレフである.
3. $\kappa^* \leq 2^{2^{\kappa^2}}$
4. $\kappa^* \leq 2^{2^{2^\kappa}}$
5. 無限濃度 κ に対して $\kappa^{**} = (\kappa + \kappa^*)^*$
6. 無限濃度 κ に対して $(\kappa^2)^* = \kappa^*$ □

定理 11. $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ は無限濃度, $\aleph$ はアレフを表すとする. 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 選択公理
2. 任意の κ に対しある $\aleph$ が存在して $\kappa \leq \aleph$.
3. $\kappa \leq \kappa^*$.
4. $\kappa \cdot \kappa^* = \kappa + \kappa^*$.
5. $\kappa \cdot \lambda = \kappa + \lambda$.
6. $\kappa^2 = \kappa$.
7. $\kappa + \kappa^* = \kappa^*$.
8. $\kappa + \lambda = \kappa$ または $\kappa + \lambda = \lambda$.
9. $\kappa \cdot \kappa^* = \kappa^*$.
10. $\kappa \cdot \lambda = \kappa$ または $\kappa \cdot \lambda = \lambda$.
11. 任意の κ に対しある λ が存在して $\kappa = \lambda^2$.
12. $\kappa^2 = \lambda^2$ ならば $\kappa = \lambda$.
13. $\kappa < \lambda$ かつ $\mu < \nu$ ならば $\kappa + \mu < \lambda + \nu$.
14. $\kappa < \lambda$ かつ $\mu < \nu$ ならば $\kappa \cdot \mu < \lambda \cdot \nu$.
15. $\kappa + \mu < \lambda + \mu$ ならば $\kappa < \lambda$.
16. $\kappa \cdot \mu < \lambda \cdot \mu$ ならば $\kappa < \lambda$.
17. $\kappa < \lambda$ ならば $\lambda - \kappa$ が存在する.
18. $\kappa < \lambda$ ならば $\lambda - \kappa = \lambda$.
19. $\kappa < \lambda$ ならばある μ が存在して $\lambda = \kappa \cdot \mu$
20. $\kappa < \lambda$ ならば $\lambda \div \kappa$ が存在する.
21. $\kappa < \lambda$ ならば $\lambda \div \kappa = \lambda$.
22. $\kappa + \mu = \kappa + \nu$ ならば $\mu = \nu$ または $\mu, \nu < \kappa$.
23. $\kappa + \kappa < \kappa + \lambda$ ならば $\kappa < \lambda$.
24. $\mu < \kappa$ かつ $\nu < \kappa$ ならば $\mu + \nu \neq \kappa$.
25. $\mu < \kappa$ かつ $\nu < \kappa$ ならば $\mu \cdot \nu \neq \kappa$.

26. $\mu^\kappa < \mu^\lambda$ かつ $\mu \neq 0$ ならば $\kappa < \lambda$.
27. $\kappa^* = \mu^* \Longrightarrow \kappa = \mu$.
28. $\kappa^* < \mu < \kappa + \kappa^*$ となる μ は存在しない.
29. $\kappa^* < \mu^* \Longrightarrow \kappa < \mu$.
30. $\kappa^* < \aleph^* \Longrightarrow \kappa < \aleph$.
31. $\kappa < \mu \Longrightarrow \kappa^* < \mu^*$.
32. $\aleph < \mu \Longrightarrow \aleph^* < \mu^*$.
33. $\kappa^* < \kappa^* + \kappa \Longrightarrow \kappa^{**} \leq \kappa^* + \kappa$.
34. $\kappa \leq \lambda + \mu$ ならば $\kappa \leq \lambda$ または $\kappa \leq \mu$.
35. $\kappa \leq \lambda + \aleph$ ならば $\kappa \leq \lambda$ または $\kappa \leq \aleph$.
36. $\kappa \leq \lambda \cdot \mu$ ならば $\kappa \leq \lambda$ または $\kappa \leq \mu$.
37. $\kappa \leq \lambda \cdot \aleph$ ならば $\kappa \leq \lambda$ または $\kappa \leq \aleph$.

証明. ($1 \Longrightarrow$ その他) 整列可能定理により，全ての無限濃度はアレフである．よって命題 5 等から容易に 2–37 が従う．(26 は濃度の比較可能性により対偶が「$\kappa \geq \lambda$ ならば $\mu^\kappa \geq \mu^\lambda$ または $\mu = 0$」なので成り立つ．)

($2 \Longrightarrow 1$) 明らか.

($3 \Longrightarrow 2$) κ^* がアレフであるから明らか.

($4 \Longrightarrow 3$) $\kappa \cdot \kappa^* = \kappa + \kappa^*$ とすると，κ^* はアレフだから命題 6 より $\kappa \leq \kappa^*$ または $\kappa^* \leq \kappa$ である．$\kappa^* \not\leq \kappa$ だから $\kappa \leq \kappa^*$ となる.

($5 \Longrightarrow 4$) 明らか.

($6 \Longrightarrow 5$) $\kappa + \lambda = (\kappa + \lambda)^2 = \kappa^2 + 2 \cdot \kappa \cdot \lambda + \lambda^2 \geq \kappa \cdot \lambda \geq \kappa + \lambda$.

$7 \Longrightarrow 3$ は明らか.

($8 \Longrightarrow 7$) $\kappa + \kappa^* = \kappa$ と仮定すると $\kappa^* \leq \kappa$ となり矛盾する．故に仮定 8 より $\kappa + \kappa^* = \kappa^*$ である.

($9 \Longrightarrow 3$) 明らか.

($10 \Longrightarrow 9$) $\kappa \cdot \kappa^* = \kappa$ と仮定すると $\kappa^* \leq \kappa$ となり矛盾する．故に仮定 10 より $\kappa \cdot \kappa^* = \kappa^*$ である.

($11 \Longrightarrow 7$) 仮定 11 より，$\kappa + \kappa^* = \lambda^2$ となる λ が存在する．$\kappa^* \leq \kappa + \kappa^* = \lambda^2$ である．よって命題 8 より $\kappa^* \leq \lambda$ となる．従って命題 1 により $\lambda = \kappa^* + \mu$ となる μ が取れる．このとき

$$\kappa + \kappa^* = \lambda^2 = (\kappa^* + \mu)^2 = (\kappa^*)^2 + 2 \cdot \kappa^* \cdot \mu + \mu^2 \geq \kappa^* \cdot \mu.$$

よって命題 6 から $\kappa^* \leq \kappa$ または $\mu \leq \kappa^*$ が分かる．$\kappa^* \not\leq \kappa$ なので $\mu \leq \kappa^*$，従って

$\lambda = \kappa^* + \mu \le \kappa^* + \kappa^* = \kappa^*$，故に $\lambda = \kappa^*$ である．よって $\kappa + \kappa^* = \lambda^2 = (\kappa^*)^2 = \kappa^*$ である．

(12 $\Longrightarrow$ 3) $\lambda := \kappa^{\aleph_0}$ と置くと $\kappa \le \lambda$ かつ $\lambda^2 = \kappa^{2\cdot\aleph_0} = \kappa^{\aleph_0} = \lambda$ である．$(\lambda + \lambda^*)^2 = \lambda^2 + 2\cdot\lambda\cdot\lambda^* + (\lambda^*)^2 \ge \lambda\cdot\lambda^*$ となるが，一方

$$\begin{aligned}(\lambda + \lambda^*)^2 &= \lambda^2 + 2\cdot\lambda\cdot\lambda^* + (\lambda^*)^2 \\ &= \lambda + 2\cdot\lambda\cdot\lambda^* + \lambda^* \\ &\le \lambda\cdot\lambda^* + 2\cdot\lambda\cdot\lambda^* \quad (\text{命題 2 より}) \\ &= \lambda\cdot(3\cdot\lambda^*) \\ &= \lambda\cdot\lambda^*\end{aligned}$$

だから，$(\lambda + \lambda^*)^2 = \lambda\cdot\lambda^*$ となる．よって $(\lambda + \lambda^*)^2 = \lambda\cdot\lambda^* = \lambda^2\cdot(\lambda^*)^2 = (\lambda\cdot\lambda^*)^2$ が成り立つ．従って仮定 12 より $\lambda + \lambda^* = \lambda\cdot\lambda^*$ である．故に命題 6 から $\kappa \le \lambda \le \lambda^*$ が分かる．

(13 $\Longrightarrow$ 2) $\lambda := \aleph_0\cdot\kappa$ と置くと $\kappa \le \lambda$ かつ $2\cdot\lambda = 2\cdot\aleph_0\cdot\kappa = \aleph_0\cdot\kappa = \lambda$ である．$\lambda < \lambda + \lambda^*$ かつ $\lambda^* < \lambda + \lambda^*$ と仮定すると仮定 13 より $\lambda + \lambda^* < (\lambda + \lambda^*) + (\lambda + \lambda^*) = 2\cdot\lambda + 2\cdot\lambda^* = \lambda + \lambda^*$ となって矛盾する．故に $\lambda = \lambda + \lambda^*$ または $\lambda^* = \lambda + \lambda^*$ である．$\lambda^* \not\le \lambda$ なので $\lambda^* = \lambda + \lambda^*$ でなければならない．即ち $\kappa \le \lambda \le \lambda^*$ である．

(14 $\Longrightarrow$ 2) $\lambda := \kappa^{\aleph_0}$ として 13 $\Longrightarrow$ 2 と同様にすればよい．

(15 $\Longrightarrow$ 7) $\kappa^* < \kappa + \kappa^*$ と仮定すると $\kappa^* + \kappa^* = \kappa^* < \kappa + \kappa^*$ だから仮定 15 より $\kappa^* < \kappa$ となり矛盾する．

(16 $\Longrightarrow$ 9) 15 $\Longrightarrow$ 7 と同様．

(17 $\Longrightarrow$ 7) $\kappa^* < \kappa + \kappa^*$ と仮定する．仮定 17 より $\kappa + \kappa^* = \kappa^* + \mu$ となる μ が唯一つ存在する．$\mu = \kappa$ も $\mu = \kappa + \kappa^*$ もこの式を満たすから，一意性より $\kappa = \kappa + \kappa^*$．従って $\kappa^* \le \kappa$ となり矛盾．

(18$\Longrightarrow$17) 明らか．

(19 $\Longrightarrow$ 7) $\kappa^* < \kappa + \kappa^*$ と仮定する．仮定 19 より $\kappa + \kappa^* = \kappa^*\cdot\mu$ となる μ が存在する．従って命題 6 より $\kappa^* \le \kappa$ または $\mu \le \kappa^*$ である．$\kappa^* \not\le \kappa$ だったから $\mu \le \kappa^*$ である．よって命題 5 より $\kappa + \kappa^* = \kappa^*\cdot\mu = \kappa^*$ となり矛盾する．故に $\kappa^* = \kappa + \kappa^*$ である．

20 $\Longrightarrow$ 19 と 21 $\Longrightarrow$ 20 は明らか．

(22 $\Longrightarrow$ 3) $\kappa^* + \kappa = \kappa^* + (\kappa + \kappa^*)$ だから仮定 22 より $\kappa = \kappa + \kappa^*$ または $\kappa, \kappa + \kappa^* < \kappa^*$ である．$\kappa^* \not\le \kappa$ だから $\kappa, \kappa + \kappa^* < \kappa^*$ となる．従って $\kappa \le \kappa^*$ である．

(23 $\Longrightarrow$ 7) $\kappa^* + \kappa^* = \kappa^* \le \kappa^* + \kappa$ である．$\kappa^* + \kappa^* < \kappa^* + \kappa$ だとすると仮定 23 から $\kappa^* < \kappa$ となり矛盾するので $\kappa^* = \kappa^* + \kappa$ である．

(24 $\Longrightarrow$ 18) $\kappa < \lambda$ とする．命題 1 より $\lambda = \kappa + \mu$ となる μ が存在する．仮定 24 より $\lambda = \mu$ となる，即ち μ は一意に決まる．よって $\lambda - \kappa = \lambda$ である．

(25 $\Longrightarrow$ 9) $\kappa \leq \kappa \cdot \kappa^*$，$\kappa^* \leq \kappa \cdot \kappa^*$ なので，仮定 25 より $\kappa = \kappa \cdot \kappa^*$ または $\kappa^* = \kappa \cdot \kappa^*$ である．$\kappa^* \not\leq \kappa$ だったから $\kappa^* = \kappa \cdot \kappa^*$ となる．

(26 $\Longrightarrow$ 2) $\mu := 2^{\kappa^{\aleph_0}}$ と置く．$\mu^\kappa = (2^{\kappa^{\aleph_0}})^\kappa = 2^{\kappa^{\aleph_0+1}} = 2^{\kappa^{\aleph_0}} = \mu \leq \mu^{\mu^*}$ である．$\mu^\kappa = \mu^{\mu^*}$ だとすると $\mu^* \leq \mu^{\mu^*} = \mu^\kappa = \mu$ となり矛盾するから，$\mu^\kappa < \mu^{\mu^*}$ である．故に仮定 26 より $\kappa < \mu^*$ である．

(27 $\Longrightarrow$ 7) 命題 10 の 5 より $\kappa^{**} = (\kappa + \kappa^*)^*$ だから仮定 27 により $\kappa^* = \kappa + \kappa^*$ となる．

(28 $\Longrightarrow$ 6) $(\kappa^2)^* = \kappa^* \leq \kappa + \kappa^* \leq \kappa^2 + \kappa^*$ だから，仮定 28 により $\kappa^* = \kappa + \kappa^*$ または $\kappa + \kappa^* = \kappa^2 + \kappa^*$ である．もし $\kappa^* = \kappa + \kappa^*$ ならば $\kappa \leq \kappa^*$ だから命題 4 により $\kappa^2 = \kappa$ である．

そこで $\kappa + \kappa^* = \kappa^2 + \kappa^*$ とすると $\kappa \leq \kappa^2 \leq \kappa + \kappa^*$ となる．よって再び仮定 28 により $\kappa = \kappa^2$ または $\kappa^2 = \kappa + \kappa^*$ である．$\kappa^2 = \kappa + \kappa^*$ と仮定すると $\kappa^* \leq \kappa^2$ だから命題 8 より $\kappa^* \leq \kappa$ となり矛盾する．故に $\kappa = \kappa^2$ である．

(29 $\Longrightarrow$ 30) 明らか．

(30 $\Longrightarrow$ 3) κ^* はアレフだから，$\kappa^* < \kappa^{**}$ より $\kappa < \kappa^*$ である．

(31 $\Longrightarrow$ 32) 明らか．

(32 $\Longrightarrow$ 7) $\kappa^* < \kappa + \kappa^*$ と仮定する．命題 10 の 5 より $\kappa^{**} = (\kappa + \kappa^*)^*$ だから，仮定 32 より $\kappa^{**} < (\kappa + \kappa^*)^* = \kappa^{**}$ となり矛盾する．従って $\kappa^* = \kappa + \kappa^*$ である．

(33 $\Longrightarrow$ 3) $\kappa^{**} \leq \kappa^* + \kappa$ と仮定する．κ^{**} はアレフだから命題 4 より $(\kappa^{**})^2 = \kappa^{**}$ となる．故に $(\kappa^{**})^2 \leq \kappa^* + \kappa$ だから命題 6 より「$\kappa^{**} \leq \kappa^*$ または $\kappa^{**} \leq \kappa$」となり矛盾する．従って $\kappa^{**} \not\leq \kappa^* + \kappa$ であるから，仮定 33 より $\kappa^* = \kappa^* + \kappa$ となる．従って $\kappa \leq \kappa^*$ である．

(34 $\Longrightarrow$ 35) 明らか

(35 $\Longrightarrow$ 3) $\kappa + \kappa^* \leq \kappa + \kappa^*$ だから仮定 35 より「$\kappa + \kappa^* \leq \kappa$ または $\kappa + \kappa^* \leq \kappa^*$」となる．$\kappa + \kappa^* \leq \kappa$ と仮定すると $\kappa^* \leq \kappa$ となり矛盾するから $\kappa + \kappa^* \leq \kappa^*$，従って $\kappa \leq \kappa^*$ である．

(36 $\Longrightarrow$ 37) 明らか

(37 $\Longrightarrow$ 3) $\kappa \cdot \kappa^* \leq \kappa\kappa^*$ だから仮定 35 より「$\kappa \cdot \kappa^* \leq \kappa$ または $\kappa \cdot \kappa^* \leq \kappa^*$」となる．$\kappa \cdot \kappa^* \leq \kappa$ と仮定すると $\kappa^* \leq \kappa$ となり矛盾するから $\kappa \cdot \kappa^* \leq \kappa^*$，従って $\kappa \leq \kappa^*$ である． □

注意 1. 6「$\kappa^2 = \kappa$」は選択公理と同値であるが，$2 \cdot \kappa = \kappa$ は選択公理と同値ではない．

注意 2. 12「$\kappa^2 = \lambda^2$ ならば $\kappa = \lambda$」は選択公理と同値であるが，「$2 \cdot \kappa = 2 \cdot \lambda$ ならば $\kappa = \lambda$」は ZF で成り立つ．

注意 3. 19「$\kappa < \lambda$ ならばある μ が存在して $\lambda = \kappa \cdot \mu$」は選択公理と同値であるが，「$\kappa < \lambda$ ならばある μ が存在して $\lambda = \kappa + \mu$」は ZF で成り立つ．(命題 1)

定理 12. 選択公理
$\Longleftrightarrow$ 無限濃度 κ, λ に対して以下が成り立つ．

「$\kappa \leq \lambda < 2^\kappa$ かつある μ が存在して $\kappa = \mu^2$」ならばある ν が存在して $\lambda = \nu^2$．

証明. ($\Longrightarrow$) 明らか．

($\Longleftarrow$) 定理 11 の条件 2 を示す．κ を無限濃度として $\lambda := \kappa^{\aleph_0}$ とおく．$\lambda^2 = \kappa^{2 \cdot \aleph_0} = \kappa^{\aleph_0} = \lambda$ である．命題 10 の 3 より $\lambda^* \leq 2^{2^{\lambda^2}} = 2^{2^\lambda}$ となるから $2^\lambda \leq 2^\lambda + \lambda^* \leq 2^\lambda + 2^{2^\lambda} = 2^{2^\lambda}$ である．

もし $2^\lambda + \lambda^* = 2^{2^\lambda}$ であれば，$\aleph_0 \leq \lambda \leq 2^\lambda$ だから命題 3 より $\lambda^* = 2^{2^\lambda}$ となり $\kappa \leq \lambda \leq 2^{2^\lambda} = \lambda^*$ である．

そこで $2^\lambda + \lambda^* < 2^{2^\lambda}$ とする．このとき $2^\lambda \leq 2^\lambda + \lambda^* < 2^{2^\lambda}$ かつ $2^\lambda = (2^\lambda)^2$ だから，仮定によりある ν が存在して $2^\lambda + \lambda^* = \nu^2$ と書ける．故に命題 7 により $\nu \leq \lambda^*$ または $\nu \leq 2^\lambda$ である．もし $\nu \leq \lambda^*$ であれば

$$\kappa \leq \lambda \leq 2^\lambda \leq 2^\lambda + \lambda^* = \nu^2 \leq (\lambda^*)^2 = \lambda^*$$

である．

そこで $\nu \leq 2^\lambda$ とする．このとき $\lambda \leq \lambda + \lambda^* \leq 2^\lambda + \lambda^* = \nu^2 \leq (2^\lambda)^2 = 2^\lambda$ である．

もし $\lambda + \lambda^* = 2^\lambda \,(= (2^\lambda)^2)$ ならば命題 7 により $2^\lambda \leq \lambda$ または $2^\lambda \leq \lambda^*$ だから $\kappa \leq \lambda \leq 2^\lambda \leq \lambda^*$ となる．

そこで $\lambda + \lambda^* < 2^\lambda$ とする．このとき $\lambda \leq \lambda + \lambda^* < 2^\lambda$ かつ $\lambda = \lambda^2$ だから仮定によりある μ が存在して $\lambda + \lambda^* = \mu^2$ と書ける．故に命題 7 により $\mu \leq \lambda$ または $\mu \leq \lambda^*$ である．$\mu \leq \lambda$ と仮定すると $\lambda^* \leq \lambda + \lambda^* = \mu^2 \leq \lambda^2 = \lambda$ となり矛盾する．故に $\mu \leq \lambda^*$ であり $\kappa \leq \lambda + \lambda^* = \mu^2 \leq \lambda^*$ となる． $\square$

定理 13. 選択公理
$\Longleftrightarrow$ 無限濃度 κ, λ に対して「$\kappa \leq \lambda < 2^\kappa$ ならばある μ が存在して $\lambda = \kappa \cdot \mu$」．

証明. ($\Longrightarrow$) 明らか．

($\Longleftarrow$) 定理 11 の条件 2 を示す．前定理の証明と同様である．κ を無限濃度として $\lambda := \kappa^{\aleph_0}$ とおく．$2^\lambda \leq 2^\lambda + \lambda^* \leq 2^{2^\lambda}$ である．

もし $2^\lambda + \lambda^* = 2^{2^\lambda}$ であれば $\kappa \leq \lambda \leq 2^{2^\lambda} = \lambda^*$ であるから，$2^\lambda + \lambda^* < 2^{2^\lambda}$ とする．このとき $2^\lambda \leq 2^\lambda + \lambda^* < 2^{2^\lambda}$ だから，仮定によりある μ が存在して $2^\lambda + \lambda^* = \lambda \cdot \mu$ と書ける．故に命題 7 により $\lambda \leq \lambda^*$ または $\mu \leq 2^\lambda$ である．もし $\lambda \leq \lambda^*$ であれば $\kappa \leq \lambda \leq \lambda^*$ となる．

そこで $\mu \leq 2^\lambda$ とする．このとき $\lambda \leq \lambda + \lambda^* \leq 2^\lambda + \lambda^* = \lambda \cdot \mu \leq (2^\lambda)^2 = 2^\lambda$ である．

もし $\lambda + \lambda^* = 2^\lambda$ ならば $\kappa \leq \lambda \leq 2^\lambda \leq \lambda^*$ であるから，$\lambda + \lambda^* < 2^\lambda$ とする．このとき $\lambda \leq \lambda + \lambda^* < 2^\lambda$ だから仮定によりある ν が存在して $\lambda + \lambda^* = \lambda \cdot \nu$ と書ける．故に命題 7 により $\nu \leq \lambda$ または $\lambda \leq \lambda^*$ である．$\nu \leq \lambda$ と仮定すると $\lambda^* \leq \lambda + \lambda^* = \lambda \cdot \nu \leq \lambda^2 = \lambda$ となり矛盾する．故に $\lambda \leq \lambda^*$ であり $\kappa \leq \lambda \leq \lambda^*$ となる．□

定理 14. 選択公理 $\Longleftrightarrow$ 無限集合 X に対し $|X| = |\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X)|$.

証明. ($\Longrightarrow$) 命題 9 より明らか.

($\Longleftarrow$) 定理 11 の条件 6 を示す．X を集合とするとき $X \times X = \{\langle a, b\rangle \mid a, b \in X\}$ で，$\langle a, b\rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ が順序対の定義だったから $X \times X \subset \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X))$．故に

$$|X| \leq |X \times X| \leq \left|\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X))\right| = \left|\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X)\right| = |X|.$$

□

定理 15. 選択公理
$\Longleftrightarrow$「X が有限集合 $\Longleftrightarrow$ ある A, B が存在して $|A| < |X|$ かつ $|B| < |X|$ かつ $X = A \cup B$.」

証明. ($\Longrightarrow$) 定理 11 の 8 より明らか.

($\Longleftarrow$) 定理 11 の 8 を示す．$\kappa = |X|$, $\lambda = |Y|$ を任意の無限濃度とすれば $X \cup Y$ が無限集合だから $|X| = |X \cup Y|$ または $|Y| = |X \cup Y|$ となる．□

定理 16. 選択公理
$\Longleftrightarrow$「X が有限集合 $\Longleftrightarrow$ $|X| \leq 1$ であるか，ある Y が存在して $|X| + |Y| < |X| \cdot |Y|$.」

証明. ($\Longrightarrow$) 定理 11 の 5 より明らか.

($\Longleftarrow$) 定理 11 の 5 を示す．$\kappa = |X|$, $\lambda = |Y|$ を任意の無限濃度とすれば X が無限集合だから命題 2 より $|X| + |Y| = |X| \cdot |Y|$ となる．□

定理 17. 選択公理

$\Longleftrightarrow$「X が有限集合 $\Longleftrightarrow |X| \leq 1$ であるか，$|X| < |X|^2$.」

証明. ($\Longrightarrow$) 定理 11 の 6 より明らか.

($\Longleftarrow$) 定理 11 の 6 を示す．$\kappa = |X|$ を任意の無限濃度とすれば X が無限集合だから $|X| = |X|^2$ となる. □

定義. κ を濃度とする．$\kappa = |X|$ となる X を取り $e(\kappa) := |\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X)|$ と定める.

命題 18. κ, λ を無限濃度，$\aleph$ をアレフとする.

1. $e(\aleph) = \aleph$.
2. $e(\kappa + \lambda) = e(\kappa) \cdot e(\lambda)$.
3. $\kappa \cdot \aleph_0 = \kappa$ ならば $e(\kappa \cdot \aleph) = e(\kappa) \cdot e(\aleph)$.

証明. (1) 命題 9 より明らか.

(2) 互いに素な無限集合 X, Y に対して $f\colon \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X) \times \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X \cup Y)$ を $f(A, B) := A \cup B$ と定めれば f は全単射である.

(3) 2 より $e(\kappa \cdot \aleph) = e(\kappa + \aleph)$ を示せばよい．命題 2 より $\kappa + \aleph \leq \kappa \cdot \aleph$ だから $e(\kappa + \aleph) \leq e(\kappa \cdot \aleph)$ である.

逆を示す．今仮定より $\kappa \cdot \aleph_0 = \kappa$ だから $e(\kappa \cdot \aleph) \leq e(\kappa \cdot \aleph_0 + \aleph)$ を示せばよい．$\kappa = |X|$, $\aleph = |W|$, $(\mathbb{N} \times X) \cap W = \emptyset$ として $f\colon \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X \times W) \longrightarrow \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}((\mathbb{N} \times X) \cup W)$ を以下のように定める．$A \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X \times W)$ とする．$w \in W$ に対して $A_w := \{x \in X \mid (x, w) \in A\}$ と置けば，ある $w_1, \cdots, w_n \in W$ が一意に存在して

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} (A_{w_i} \times \{w_i\}),\ w_1 < w_2 < \cdots < w_n$$

と書ける．このとき $f(A) := \{w_1, \cdots, w_n\} \cup \bigcup_{i=1}^{n} (\{i\} \times A_{w_i})$ と定める．この f は単射である．よって $e(\kappa \cdot \aleph) \leq e(\kappa \cdot \aleph_0 + \aleph)$ である. □

定理 19. κ, λ は無限濃度，$\aleph$ はアレフを表すとする．次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 選択公理
2. $e(\kappa) = \kappa$.
3. $e(\kappa + \lambda) = e(\kappa) + e(\lambda)$.
4. $e(\kappa + \aleph) = e(\kappa) + e(\aleph)$.
5. $e(\kappa) = e(\lambda),\ \kappa \leq \lambda \Longrightarrow \kappa = \lambda$.

6. $e(\kappa+\lambda)=e(\kappa)$ または $e(\kappa+\lambda)=e(\lambda)$.
7. $e(\kappa+e(\kappa)^*)=e(\kappa)^*$.

証明. $1 \iff 2$ は定理 14 である.

($1 \implies$ その他) $1 \iff 2$ により明らか.

($3 \implies 4$) 明らか.

($4 \implies 1$) 定理 11 の 2 を示す. $e(\kappa)^*$ はアレフだから仮定 4 により $e(\kappa+e(\kappa)^*) = e(\kappa)+e(e(\kappa)^*) = e(\kappa)+e(\kappa)^*$ となる. 一方命題 18 により $e(\kappa+e(\kappa)^*) = e(\kappa)\cdot e(e(\kappa)^*) = e(\kappa)\cdot e(\kappa)^*$ となる. 従って $e(\kappa)\cdot e(\kappa)^* \leq e(\kappa)+e(\kappa)^*$ だから命題 6 より $e(\kappa)^* \leq e(\kappa)$ または $e(\kappa) \leq e(\kappa)^*$ となる. 故に Hartogs number の性質より $e(\kappa) \leq e(\kappa)^*$ となり $\kappa \leq e(\kappa) \leq e(\kappa)^*$ が分かる.

($5 \implies 1$) 定理 11 の 2 を示す. $\lambda := \kappa\cdot\aleph_0$ とおく. 命題 18 を使って $e(\lambda+\lambda^*) = e(\lambda)\cdot e(\lambda^*) = e(\lambda\cdot\lambda^*)$ が分かる. 命題 2 より $\lambda+\lambda^* \leq \lambda\cdot\lambda^*$ だから仮定 5 より $\lambda+\lambda^* = \lambda\cdot\lambda^*$ となる. 従って命題 6 と Hartogs number の性質から $\kappa \leq \lambda \leq \lambda^*$ となる.

($6 \implies 7$) 明らか.

($7 \implies 1$) 定理 11 の 2 を示す. $\kappa \leq \kappa+e(\kappa)^* \leq e(\kappa+e(\kappa)^*) = e(\kappa)^*$. □

定理 20. 選択公理

$\iff$ X を集合, $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ を集合族として $|X| < \left|\bigcup_{i=0}^{\infty} X_i\right|$ を満たすとする. このときある $n\in\mathbb{N}$ が存在して $|X| \leq \left|\bigcup_{i=0}^{n} X_i\right|$.

証明. ($\implies$) 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $|X| \not\leq \left|\bigcup_{i=0}^{n} X_i\right|$ と仮定する. 選択公理により濃度は比較可能であるから $\left|\bigcup_{i=0}^{n} X_i\right| < |X|$ となる. よって $|X_i| \leq |X|$ であり $\left|\bigcup_{i=0}^{\infty} X_i\right| \leq \aleph_0\cdot|X| = |X|$ となって矛盾する.

($\impliedby$) 整列可能定理を示す. その為 X を任意の集合とする. $Y_0 := X$, $Y_{i+1} := \mathcal{P}(Y_i)$, $Y := \bigcup_{i=0}^{\infty}\Gamma(Y_i)$ と定める. Y は整列可能である. 各 $i\in\mathbb{N}$ について標準的な単射 $\Gamma(Y_i) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(Y_i))) = Y_{i+3}$ が構成できるから $|Y| \leq \left|\bigcup_{i=0}^{\infty}(\{i\}\times Y_i)\right|$ である.

$|Y| < \left|\bigcup_{i=0}^{\infty}(\{i\}\times Y_i)\right|$ と仮定する．ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して $|Y| \leq \left|\bigcup_{i=0}^{n}(\{i\}\times Y_i)\right|$ となる．よってある $Z_i \subset Y_i$ が存在して $|Y| = \left|\bigcup_{i=0}^{n}(\{i\} \times Z_i)\right|$ とできる．Y が整列可能だから Z_i も整列可能であり $|Y| = \left|\bigcup_{i=0}^{n}(\{i\} \times Z_i)\right| = \sum_{i=0}^{n}|Z_i| = \max_{0\leq i\leq n}|Z_i|$ となる．$|Z_j| = \max_{0\leq i\leq n}|Z_i|$ となる j を取れば $|\Gamma(Y_j)| \leq |Y| = |Z_j| \leq |Y_j|$ となり矛盾する．

故に $|Y| = \left|\bigcup_{i=0}^{\infty}(\{i\} \times Y_i)\right| \geq |Y_0| = |X|$ となり，X は整列可能である． □

定理 21． 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 選択公理
2. 任意の集合 X に対してある集合 Y が存在して $Y = \{x \subset Y \mid |X| \not\leq |x|\}$.
3. 任意の集合 X に対してある集合 Y が存在して $|Y| = \big|\{x \subset Y \mid |X| \not\leq |x|\}\big|$.

証明. $(1 \Longrightarrow 2)$ X を任意の集合とする．$\alpha := \Gamma(\Gamma(\mathcal{P}(X)))$ とおき，$\beta < \alpha$ に対して

$$f(\beta) := \left\{x \subset \bigcup_{\gamma<\beta} f(\gamma) \;\middle|\; |x| < |X|\right\}$$

と定め，$Y := \bigcup_{\beta<\alpha} f(\beta)$ とする．この Y が $Y = \{x \subset Y \mid |X| \not\leq |x|\}$ を満たす.

$\because)$ $(\subset)$ $x \in Y$ とする．Y の定義よりある $\beta < \alpha$ が存在して $x \in f(\beta)$ となる．故に $x \subset Y$ かつ $|x| < |X|$，即ち $|X| \not\leq |x|$ である．従って $x \in \{x \subset Y \mid |X| \not\leq |x|\}$.

$(\supset)$ $x \subset Y$ かつ $|X| \not\leq |x|$ とする．選択公理により，濃度が比較可能だから $|x| \leq |X|$ である．$a \in x$ に対して $B_a := \{\beta < \alpha \mid a \in f(\beta)\}$, $\gamma_a := \min B_a$ と定め，$R := \{\gamma_a \mid a \in x\}$ とする．R は順序数の集合だから $|R| \leq |x|$ となる．故に $|R| < 2^{|R|} \leq 2^{|x|} \leq 2^{|X|}$ である．R は順序数の集合だから整列可能であり，よって Γ の性質から $|R| < |\alpha|$ が分かる．$\theta := \sup R$ と置く．明らかに $|\theta| \leq \left|\bigcup_{\beta\in R}(\{\beta\} \times \beta)\right|$ である．$\beta \in R$ とすれば $\beta < \alpha$ だったから $|\beta| < |\alpha|$ である．$\delta := \Gamma(\mathcal{P}(X))$ とすれば $\alpha = \Gamma(\delta)$ だから $|\beta| \leq |\delta|$ となる．$\beta \in R$ に対して $A_\beta := \{f\colon \beta \longrightarrow \delta \mid f$ は単射 $\} \neq \emptyset$ と定める．選択公理により $(f_\beta) \in \prod_{\beta\in R} A_\beta$ が取れる．これにより

$\left|\bigcup_{\beta\in R}(\{\beta\}\times\beta)\right| \leq \left|\bigcup_{\beta\in R}(\{\beta\}\times\delta)\right|$ である．よって

$$|\theta| \leq \left|\bigcup_{\beta\in R}(\{\beta\}\times\beta)\right| \leq \left|\bigcup_{\beta\in R}(\{\beta\}\times\delta)\right| \leq |R\times\delta| = |\delta|$$

となり $|\theta| < |\alpha|$ が成り立つ．

$a \in x$ とするとある $\beta \in R$ が存在して $a \in f(\beta)$ である．よって $x \subset \bigcup_{\beta<\theta+1} f(\beta)$ となる．$|\theta| < |\alpha|$ だから $\theta + 1 < \alpha$ である．よって，$|x| < |X|$ だったから，$x \in f(\theta+1) \subset Y$ が分かった．

(2 $\Longrightarrow$ 3) 明らか．

(3 $\Longrightarrow$ 1) 整列可能定理を示す．X を任意の集合とする．仮定 3 よりある Y が存在して $|Y| = \left|\{A \subset Y \mid |X| \not\leq |A|\}\right|$ となる．$S := \{A \subset Y \mid |X| \not\leq |A|\}$ と置き単射 $f\colon S \longrightarrow Y$ と $\infty \notin Y$ を取る．順序数 α に対して

$$g(\alpha) := \begin{cases} f(g\text{''}\alpha) & (g\text{''}\alpha \in S \text{ のとき}) \\ \infty & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

と定める．$g(\alpha) \neq \infty$，$g(\beta) \neq \infty$ で $g(\alpha) \neq g(\beta)$ ならば $\alpha \neq \beta$ である．故に順序数 γ で $g(\gamma) = \infty$ なるものが存在する．そのような γ のうち最小の γ を取っておけば $W := g\text{''}\gamma \subset Y$ で，$W = g\text{''}\gamma \notin S$ である．よって $|X| \leq |W|$ となり，W は整列可能だから X も整列可能となる． $\square$

参考文献

[1] Horst Herrlich, Axiom of Choice, Springer, 2006

[2] H. Rubin and J. Rubin, Equivalents of the axiom of choice, North Holland, 1963.