線型空間の基底の存在と選択公理

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2014 年 9 月 6 日

定理 1. 選択公理 $\iff$ 任意の線型空間は基底を持つ.

証明. ($\Longrightarrow$) V を任意な線型空間とする. $\mathcal{A} := \{X \subset V \mid X \text{ は一次独立 }\}$ とする. 一次独立の定義から, $\mathcal{A}$ は明らかに有限性を持つ.

> ※ $\mathcal{A}$ が有限性を持つとは「$X \in \mathcal{A} \iff$ 任意の有限部分集合 $Y \subset X$ に対し $Y \in \mathcal{A}$」が成立すること.

よって選択公理と同値な Tukey の補題により $\mathcal{A}$ は極大元 B を持つ.

> ※ Tukey の補題とは「有限性を持つ集合は ($\subset$ についての) 極大元を持つ」という命題のこと. Zorn の補題・極大原理を参照.

B が V を生成しないと仮定する. すると B の元の一次結合で表せないような元 $v \in V$ が存在するが, この時 $B \subsetneq B \cup \{v\} \in \mathcal{A}$ となり, B の極大性に矛盾する. よって B は V を生成する, 即ち V の基底である.

($\Longleftarrow$) 選択公理と同値な AMC を示す.

> ※ AMC (= the Axiom of Multiple Choice) とは次の命題のこと.
>
> $$\begin{array}{l}\text{非空集合の族 } \{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \text{ に対し, 有限集合の族 } \{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \text{ で} \\ \text{任意の } \lambda \in \Lambda \text{ に対し } \emptyset \neq F_\lambda \subset X_\lambda \text{ となるものが存在する.}\end{array}$$
>
> 同値性の証明は the Axiom of Multiple Choice を参照.

$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を互いに素な非空集合の族とする. k を体とし, $X := \displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を不定元の集合とみなして有理関数体 $k(X)$ を考える.

単項式 $a = \alpha x_1^{e_1} x_2^{e_2} \cdots x_n^{e_n} \in k(X)$ に対し, $I_\lambda(a) := \{1 \leq i \leq n \mid x_i \in X_\lambda\}$ と置き,

$\lambda\text{-deg}(a) := \sum_{i \in I_\lambda(a)} e_i$ を λ-次数と呼ぶことにする．各項の λ-次数が全て m になる多項式を m 次の λ-斉次多項式と呼ぶことにし，その次数も λ-deg で表すことにする．$f \in k(X)$ が $f = \dfrac{g}{h}$ $\quad(g, h$ は λ-斉次多項式，$\lambda\text{-deg}(g) = \lambda\text{-deg}(h) + d)$ と表せるとき，f を d 次の λ-斉次式と呼ぶことにする．

$$K := \{f \in k(X) \mid \text{任意の}\lambda \in \Lambda\text{に対して } f \text{ は } 0 \text{ 次の}\lambda\text{-斉次式 }\}$$

は $k(X)$ の部分体．よって $k(X)$ は K 上の線型空間とみなせる．$V := \langle X \rangle$ を X で K 上生成される $k(X)$ の部分空間とする．仮定より V は K 上の基底をもつ．それを B と書く．

さて，$\lambda \in \Lambda$ とする．$X_\lambda \subset V$ の任意の元 x は

$$x = \sum_{b \in B(x)} \alpha_b(x) b \quad (B(x) \subset B \text{ は有限集合, } \alpha_b(x) \in K^\times)$$

と一意に表される．他の元 $y \in X_\lambda$ も同様に $y = \sum_{b \in B(y)} \alpha_b(y) b$ と書くと

$$y = \left(\frac{y}{x}\right) x = \sum_{b \in B(x)} \left(\frac{y}{x}\alpha_b(x)\right) b$$

となる．表現の一意性から $B(x) = B(y)$, $\dfrac{\alpha_b(x)}{x} = \dfrac{\alpha_b(y)}{y}$ である．即ち，$B(x)$ と $\dfrac{\alpha_b(x)}{x}$ は $x \in X_\lambda$ によらずに λ から定まる．そこで $B_\lambda := B(x)$, $\beta_{b,\lambda} := \dfrac{\alpha_b(x)}{x}$ と書く．

$\alpha_b(x) \in K$ だから $\beta_{b,\lambda}$ は -1 次の λ-斉次式である．よって，$\beta_{b,\lambda}$ を既約分数で表す事にすると，分母には必ず X_λ の元が現れる．故に

$$F_\lambda := \{x \in X_\lambda \mid \text{ある } b \in B_\lambda \text{が存在して } x \text{ は } \beta_{b,\lambda} \text{ の分母に現れる }\}$$

と置けば各 $F_\lambda \subset X_\lambda$ は空でない有限部分集合である．よって AMC が成立する． □

※ AMC $\Longrightarrow$ 選択公理は基礎の公理を使っているから，この $\Longleftarrow$ の証明も基礎の公理を使っていることになる．この証明が基礎の公理無しでできるかどうかは未解決問題である．一方，次の定理の同値は基礎の公理なしで成り立つ．

定理 2. 選択公理 $\Longleftrightarrow$ 任意の線型空間は整列可能な基底を持つ．

証明. $(\Longrightarrow)$ 明らか．

($\Longleftarrow$) 整列可能定理を示す．X を任意の集合として，X で生成される $\mathbb{F}_2$ 上の線型空間 $\mathbb{F}_2^{(X)}$ を考える．仮定より，$\mathbb{F}_2^{(X)}$ は整列可能な基底 $B \subset \mathbb{F}_2^{(X)}$ を持つ．即ち $\mathbb{F}_2^{(X)} \cong \mathbb{F}_2^{(B)}$ である．B が整列可能だから，$|B| = |\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(B)| = |\mathbb{F}_2^{(B)}|$ となり，$\mathbb{F}_2^{(B)}$ も整列可能であることが分かる．故に $X \subset \mathbb{F}_2^{(B)}$ も整列可能である． □

定理 3. 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 選択公理
2. 線型空間の生成系は基底を含む.
3. $\mathbb{Q}$-線型空間の生成系は基底を含む.
4. $\mathbb{F}_2$-線型空間の生成系は基底を含む.

証明. ($1 \Longrightarrow 2$) 定理 1 と同様.

($2 \Longrightarrow 3$) 明らか.

($3 \Longrightarrow 1$) AMC を示す.

※ AMC $\Longrightarrow$ 選択公理は基礎の公理を使っているから，この $3 \Longrightarrow 1$ の証明も基礎の公理を使っていることになる．実は，$3 \Longrightarrow 1$ の証明には基礎の公理は必要ない．何故ならば，仮定 3 から「有限集合の族についての選択公理」が導かれるからである．それをここで示しておく．

「有限集合の族についての選択公理」を示すには次の命題を示せばよい．

> 有限集合の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$が「任意の$\lambda \in \Lambda$に対し $|X_\lambda| \geq 2$」を満たすとき，
> ある族 $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$が存在して任意の$\lambda \in \Lambda$に対して$\emptyset \neq F_\lambda \subsetneq X_\lambda$となる．

※ the Axiom of Multiple Choice の定理 2 と同様である．

有限集合の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が「任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $|X_\lambda| \geq 2$」を満たすとする．これらは互いに素であるとしてよい．$\lambda \in \Lambda$ とする．

$$V_\lambda := \left\{ \sum_{x\in X_\lambda} \alpha_x x \;\middle|\; \alpha_x \in \mathbb{Q},\ \sum_{x\in X_\lambda} \alpha_x = 0 \right\}$$

とする．V_λ は $\mathbb{Q}$ 上の線型空間で，明らかに $\dim_{\mathbb{Q}} V_\lambda = |X_\lambda| - 1$ である．

※ 有限次元線型空間では，選択公理無しに次元が一意に定まることに注意する．

$V := \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ と置く．$G_\lambda := \{x - y \in V_\lambda \mid x, y \in X_\lambda,\ x \neq y\}$, $G := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ とす

れば G は V を生成する．故に仮定から V の基底 $B \subset G$ が存在する．$B_\lambda := B \cap G_\lambda$ と置く．G_λ の定義から，B_λ は $|X_\lambda| - 1$ 個の $x - y$ からなる．そこには X_λ の元が $2(|X_\lambda| - 1)$ 回現れる．

(i) $|X_\lambda| \geq 3$ のとき．

このときは $|X_\lambda|$ が $2(|X_\lambda| - 1)$ を割らないから，全ての $x \in X_\lambda$ が同じ回数表れるということは無い．そこで $m_\lambda := \min\{x$ が現れた回数 $\mid x \in X_\lambda\}$ として $F_\lambda := \{x \in X_\lambda \mid x$ が現れた回数 $= m_\lambda\}$ と置けばよい．

(ii) $|X_\lambda| = 2$ のとき．

このときは $|B_\lambda| = 1$ である．$B_\lambda = \{b\}$ とする．今 $\mathbb{Q}$ は標数 0 だから $1 \neq -1$．そこで $F_\lambda := \{x \in X_\lambda \mid b$ に現れる x の係数 $= 1\}$ と置けばよい．

AMC を示すために，$\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を非空集合の族とする．各 X_λ は 3 つ以上元を持つとしても一般性を失わない．各 $\lambda \in \Lambda$ に対し $\mathbb{Q}$-線型空間 V_λ を

$$V_\lambda := \{f : X_\lambda \longrightarrow \mathbb{Q} \mid \text{ある有限集合 } F \subset X_\lambda \text{があって } f \text{ は } X_\lambda \setminus F \text{ 上定数関数}\}$$

と定義する．$G_\lambda := \{f \in V_\lambda \mid f$ は定数関数ではないが一点を除くと定数関数 $\}$ と置けば G_λ は V_λ を生成する．

$V := \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ とする．$i_\lambda : V_\lambda \hookrightarrow V$ を標準的な埋め込みとして，$G := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} i_\lambda(G_\lambda)$ と置けば G は V を生成する．そこで仮定より V の基底 $B \subset G$ が存在する．$B_\lambda := \{x \in V_\lambda \mid i_\lambda(x) \in G\}$ とすれば $B_\lambda \subset G_\lambda$ が V_λ の基底である．

定数関数 $1 \in V_\lambda$ を基底 B_λ の元 b_i の一次結合で表す: $1 = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n$．$b_i \in G_\lambda$ で，X_λ は 3 つ以上の元を持つから，$b_i : X_\lambda \longrightarrow \mathbb{Q}$ が $X_\lambda \setminus \{x_i\}$ 上定数関数になるような x_i が唯一つ存在する．そこで $F_\lambda := \{x_1, \cdots, x_n\}$ とすればよい．

$(2 \Longrightarrow 4)$ 明らか．

$(4 \Longrightarrow 1)$ $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を互いに素な非空集合の族とする．各 X_λ は無限集合としても一般性を失わない．$\lambda \in \Lambda$ とする．$V_\lambda := \{f : X_\lambda \longrightarrow \mathbb{F}_2 \mid$ 有限個の $x \in X_\lambda$ を除いて f は定数関数 $\} \subset \mathbb{F}_2^{X_\lambda}$ と置く．V_λ は $\mathbb{F}_2$-線型空間 $\mathbb{F}_2^{X_\lambda}$ の部分空間である．$x \in X_\lambda$ に対して $f_x, g_x \in V_\lambda$ を

$$f_x(y) := \begin{cases} 1 & (y = x \text{ のとき}) \\ 0 & (y \neq x \text{ のとき}) \end{cases}, \quad g_x(y) := \begin{cases} 0 & (y = x \text{ のとき}) \\ 1 & (y \neq x \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定める．$V := \bigoplus\limits_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ とする．$G := \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} \bigcup\limits_{x \in X_\lambda} \{f_x, g_x\}$ は V の生成系である．故に仮定 4 から V の基底 $B \subset G$ が存在する．

$\lambda \in \Lambda$ を取る．$f_{x_\lambda} \in B$ かつ $g_{x_\lambda} \in B$ となるような $x_\lambda \in X_\lambda$ が一意に存在する．

$\because$) $1_\lambda \in V_\lambda$ を任意の $x \in X_\lambda$ に対して $1_\lambda(x) := 1$ で定める．B が V の基底だから $e^{(0)}, \cdots, e^{(n_\lambda)} \in B$ が一意に存在して $1_\lambda = e^{(0)} + \cdots + e^{(n_\lambda)}$ と書ける．$e^{(i)} \in V$ の V_λ 成分を $e_\lambda^{(i)}$ と書く．$I := \{0 \leq i \leq n_\lambda \mid e_\lambda^{(i)}$ は無限個の $x \in X_\lambda$ に対して 1 を取る $\}$ と置く．

$|I|$ が偶数だとすると $\sum_{i\in I} e_\lambda^{(i)}$ は有限個の $x \in X_\lambda$ を除いて 0 を取る．故に $1_\lambda \in V_\lambda$ は有限個の $x \in X_\lambda$ を除いて 0 を取る．今 1_λ は $x \in X_\lambda$ に対して 1 を取るから，X_λ は有限集合で無ければならず，矛盾する．従って $|I|$ は奇数である．

このとき $\sum_{i\in I} e_\lambda^{(i)}$ は有限個の $x \in X_\lambda$ を除いて 1 を取る．$Y_\lambda := \{x \in X_\lambda \mid \sum_{i\in I} e_\lambda^{(i)}(x) = 0\}$ と置く．$x_\lambda \in Y_\lambda$ を一つ取る．今，$|I|$ は奇数だったから，ある $j \in I$ が存在して $l_\lambda^{(j)}(x_\lambda) = 0$ となる．$j = 0$ としてよい．このとき，G の定義から明らかに $e_\lambda^{(0)} = g_{x_\lambda}$ である．故に $n = 1$ かつ $e_\lambda^{(1)} = f_{x_\lambda}$ となることが分かる．即ち $f_{x_\lambda} \in B$ かつ $g_{x_\lambda} \in B$ である．このとき $1_\lambda = f_{x_\lambda} + g_{x_\lambda}$ だから，表現の一意性により，このような x_λ は唯一つしか存在しない．

この x_λ を使って $f : \Lambda \longrightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を $f(\lambda) := x_\lambda$ と定めれば，f が選択関数である． $\square$

※ 2 $\Longrightarrow$ 1 の証明については，簡明な証明が知られています．その証明についてはかがみさんの日記の線型空間の基底の存在と選択公理 (簡単な場合) を参照．

定義. V を集合，$\Subset$ を $\mathcal{P}(V)$ 上の二項関係とする．小文字 x, y は V の元を動き，大文字 X, Y, Z は V の部分集合を動くとする．次の条件を満たすとき，$(V, \Subset)$ を一般化線型空間と呼ぶことにする．

1. $Y \subset X$ ならば $Y \Subset X$.
2. 「任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $X_\lambda \Subset Y$」ならば $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \Subset Y$.
3. $X \Subset Y$ かつ $Y \Subset Z$ ならば $X \Subset Z$.
4. $\{x\} \Subset X \cup \{y\}$ かつ $\{x\} \not\Subset X$ ならば $\{y\} \Subset X \cup \{x\}$.
5. $\{x\} \Subset X$ ならば，ある有限部分集合 $Y \subset X$ が存在して $\{x\} \Subset Y$.

定義. $(V, \Subset)$ を一般化線型空間とする．

1. $X \subset V$ が独立 $\Longleftrightarrow$ $\{x\} \Subset X \setminus \{x\}$ となる $x \in X$ は存在しない．
2. $B \subset V$ が基底 $\Longleftrightarrow$ B が独立でありかつ $V \Subset B$.

定理 4. 選択公理 $\Longleftrightarrow$ 任意の一般化線型空間は基底を持つ．

証明. ($\Longrightarrow$) V を一般化線型空間とする．$\mathcal{A} := \{X \subset V \mid X$ は独立 $\}$ は有限性を持つ．

∵) X が独立であるとする．有限部分集合 $Y \subset X$ が独立でないと仮定する．ある $y \in Y$ が存在して $\{y\} \Subset Y \setminus \{y\}$ となる．$Y \setminus \{y\} \subset X \setminus \{y\}$ だから一般化線型空間の定義の 1 により $Y \setminus \{y\} \Subset X \setminus \{y\}$ である．故に定義の 3 から $\{y\} \Subset X \setminus \{y\}$ となり，X が独立であることに矛盾する．故に任意の有限部分集合 $Y \subset X$ は独立である．

　逆に，任意の有限部分集合 $Y \subset X$ が独立であるとする．X が独立でないと仮定する．ある $x \in X$ が存在して $\{x\} \Subset X \setminus \{x\}$ となる．このとき定義の 5 から，ある有限部分集合 $Z \subset X \setminus \{x\}$ が存在して $\{x\} \Subset Z$ である．このとき $Y := Z \cup \{x\}$ と置けば $\{x\} \Subset Y \setminus \{x\}$ となり，有限部分集合 $Y \subset X$ が独立であることに矛盾する．故に X は独立である．

　従って Tukey の補題により $\mathcal{A}$ は $\subset$ に関する極大元 $B \in \mathcal{A}$ を持つ．B が基底でないとする．B は独立だから，$V \not\Subset B$ である．$V = \bigcup_{x \in V} \{x\}$ だから，一般化線型空間の定義の 2 によりある $x \in V$ が存在して $\{x\} \not\Subset B$ となる．$\bar{B} := B \cup \{x\}$ と置けば $\bar{B}$ は独立である．

∵) $\bar{B}$ が独立でないと仮定するとある $y \in \bar{B}$ が存在して $\{y\} \Subset \bar{B} \setminus \{y\}$ である．$\{x\} \not\Subset B$ だから $y \neq x$, よって $y \in B$ である．B は独立だから $\{y\} \not\Subset B \setminus \{y\}$ となる．$\{y\} \Subset \bar{B} \setminus \{y\} = (B \setminus \{y\}) \cup \{x\}$ だから定義の 4 により $\{x\} \Subset (B \setminus \{y\}) \cup \{y\} = B$ となり矛盾する．

　故に B の極大性に矛盾する．従って B は基底である．

　($\Longleftarrow$) $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を互いに素な非空集合の族とする．$V := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ として $\Subset$ を

$$X \Subset Y \Longleftrightarrow \text{任意の} \lambda \in \Lambda \text{に対して「} X \cap X_\lambda \neq \emptyset \text{ ならば } Y \cap X_\lambda \neq \emptyset \text{」}$$

と定める．$(V, \Subset)$ は一般化線型空間である．

∵) 一般化線型空間の定義 1 から 5 を確かめる．1，2，3 は明らかである．

　4 について．$\{x\} \Subset X \cup \{y\}$ かつ $\{x\} \not\Subset X$ とする．$x \in V$ だから，ある $\lambda \in \Lambda$ が一意に存在して $x \in X_\lambda$ である．即ち $\{x\} \cap X_\lambda \neq \emptyset$ である．任意の $\mu \neq \lambda$ に対して $\{x\} \cap X_\mu = \emptyset$ だから，$\{x\} \not\Subset X$ となるためには $X \cap X_\lambda = \emptyset$ でなければならない．一方，$\{x\} \Subset X \cup \{y\}$ の定義と $\{x\} \cap X_\lambda \neq \emptyset$ から $(X \cup \{y\}) \cap X_\lambda \neq \emptyset$ である．故

に $y \in X_\lambda$ となる．従って $\{y\} \Subset X \cup \{x\}$ が分かる．

5 について．$\{x\} \Subset X$ とする．$x \in V$ だから，ある $\lambda \in \Lambda$ が一意に存在して $x \in X_\lambda$ である．$y \in X \cap X_\lambda$ を一つ取る．このとき $Y := \{y\}$ とすれば明らかに $\{x\} \Subset Y$ となる．

よって仮定により V の基底 B が存在する．$V \Subset B$ だから，任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $B \cap X_\lambda \neq \emptyset$ である．$x, y \in B \cap X_\lambda$ とする．基底 B は独立だから $\{x\} \not\Subset B \setminus \{x\}$ である．$\{x\} \cap X_\lambda \neq \emptyset$，任意の $\mu \neq \lambda$ に対して $\{x\} \cap X_\mu = \emptyset$ だから，$\{x\} \not\Subset B \setminus \{x\}$ となるためには $(B \setminus \{x\}) \cap X_\lambda = \emptyset$ でなければならない．$y \in B \cap X_\lambda$ だったから $x = y$ である．従って，$|B \cap X_\lambda| = 1$ が分かった．故に B が $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の選択集合である． □

参考文献

[1] A. Blass, Existence of bases implies the Axiom of Choice, Comtemporary Mathematics 31 (1984), 31–33, `http://www.math.lsa.umich.edu/~ablass/set.html`

[2] M. Bleicher, Some theorems on Vector Spaces and the Axiom of Choice, Fund. Math. 54(1964), 95–107, `http://matwbn.icm.edu.pl/tresc.php?wyd=1&tom=54`

[3] Horst Herrlich, Axiom of Choice，Springer, 2006