Banach-Tarski の定理

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2015 年 12 月 5 日

定義. (1) $X = Y \sqcup Z \iff X = Y \cup Z$ かつ $Y \cap Z = \emptyset$

(2) $X, Y \subset \mathbb{R}^3$ を有界部分集合とする．このときある $r = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ が存在して $X \cap (Y + r) = \emptyset$ $(Y + r := \{(x + a, y + b, z + c) \mid (x, y, z) \in Y\})$ とできる．この r を使って $X \oplus Y := X \sqcup (Y + r)$ と定める．

※ もちろんこの $X \oplus Y$ は r の取り方によるが，以下では r の取り方は特に関係ない場面でしか $X \oplus Y$ は使用しない．

G_3 を $\mathbb{R}^3$ の回転と平行移動がなす群とする．

定義. $X, Y \subset \mathbb{R}^3$ が分割合同 ($X \sim Y$ で表す)
$\iff$ ある $n \in \mathbb{N}$ と $X_i, Y_i \subset \mathbb{R}^3$, $\sigma_i \in G_3$ $(0 \leq i \leq n)$ が存在して $X = X_0 \sqcup \cdots \sqcup X_n$, $Y = Y_0 \sqcup \cdots \sqcup Y_n$, $Y_i = \sigma_i X_i$.

命題 1. (1) 分割合同 $\sim$ は同値関係である．

(2) $X_0 \sim Y_0$, $X_1 \sim Y_1$ ならば $X_0 \oplus X_1 \sim Y_0 \oplus Y_1$ である．特に $X_0 \cap X_1 = \emptyset$, $Y_0 \cap Y_1 = \emptyset$ ならば $X_0 \sqcup X_1 \sim Y_0 \sqcup Y_1$ となる． □

命題 2 (Banach-Tarski の定理)**.** $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ とすれば $B \sim B \oplus B$.

これを証明するために，まず分割合同の例を二つあげる．

例. 適当な方法で $S^1 = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ とみなす．

$X := \{e^{n\sqrt{-1}} \mid n \in \mathbb{N}\}$, $Y := S^1 \setminus X$ とする．原点を中心とした 1 ラジアンの回転を σ とすれば $\sigma X = \{e^{n\sqrt{-1}} \mid n > 0\} = X \setminus \{1\}$ であるから $S^1 = X \sqcup Y \sim (X \setminus \{1\}) \sqcup Y =$

$S^1 \setminus \{1\}$ となる．即ち「円周から一点を抜いた集合」は円周と分割合同である． $\square$

例． $O \in \mathbb{R}^3$ を原点として，(適当に縮小した)S^1 を B の中に $O \in B \cap S^1$ となるように埋め込めば $B = (B \setminus S^1) \sqcup S^1 \sim (B \setminus S^1) \sqcup (S^1 \setminus \{O\}) = B \setminus \{O\}$ だから「球体から原点を抜いた集合」は球体と分割合同である． $\square$

これらの例から分かるように，分割合同というのは (物理的には) かなり変な分割の仕方も許している．また，次のことが分かる．

命題 3. $S^2 \sim S^2 \oplus S^2$ とする．このとき $B \sim B \oplus B$

証明． $S^2 = X_0 \sqcup \cdots \sqcup X_n$, $S^2 \oplus S^2 = Y_0 \sqcup \cdots \sqcup Y_n$, $Y_i = \sigma_i X_i$ とする．$X \subset S^2$ に対して $\bar{X} := \{tx \mid x \in X, 0 < t \leq 1\}$ とすれば $\bar{S^2} = B \setminus \{O\}$ となり，$B \setminus \{O\} = \bar{X}_0 \sqcup \cdots \sqcup \bar{X}_n$, $B \setminus \{O\} \oplus B \setminus \{O\} = \bar{Y}_0 \sqcup \cdots \sqcup \bar{Y}_n$, $\bar{Y}_i = \sigma_i \bar{X}_i$ である．故に $B \sim B \setminus \{O\} \sim B \setminus \{O\} \oplus B \setminus \{O\} \sim B \oplus B$ である． $\square$

故に，後は $S^2 \sim S^2 \oplus S^2$ を示せばよい．

定義． X を集合とする．有限列の集合 $\{x_1 \cdots x_n \mid n \in \mathbb{N},\ x_i \in X \cup X^{-1}\}$ に積を列の 結合 $(x_1 \cdots x_n) \cdot (y_1 \cdots y_m) := x_1 \cdots x_n y_1 \cdots y_m$ で定めるとこれは群になる (ただし，x と x^{-1} が隣り合ったときはキャンセルする．また空文字列を単位元とみなす)．これを X で生成される自由群という．

二元集合 $\{\rho, \tau\}$ で生成される自由群を F_2 と書く．

命題 4. $W(\sigma) := \{x_1 \cdots x_n \in F_2 \mid x_1 = \sigma\}$ と置けば

$$\begin{aligned} F_2 &= \{1\} \sqcup W(\rho) \sqcup W(\rho^{-1}) \sqcup W(\tau) \sqcup W(\tau^{-1}) \\ &= W(\rho) \sqcup \rho W(\rho^{-1}) \\ &= W(\tau) \sqcup \tau W(\tau^{-1}). \end{aligned}$$

$\square$

Banach-Tarski の証明において，選択公理を使用するのは次の部分だけである．

命題 5. 選択公理を仮定する．F_2 が集合 $X \subset \mathbb{R}^3$ に自由に作用しているとき，ある $A, B \subset X$ が存在して $A \sqcup B \subset X$, $X \sim A \sim B$

※ 群 G の X への作用が自由である

$\Longleftrightarrow$ 任意の $g \in G,\ x \in X$ に対して「$gx = x \Longrightarrow g = e$」

証明. X に同値関係 R を「$xRy \Longleftrightarrow$ ある $\sigma \in F_2$ が存在して $y = \sigma x$」で定める．選択公理により商集合 X/R の完全代表系 M を取ることができる．すると作用が自由であるから $X = \bigsqcup_{\sigma \in F_2} \sigma M$ となる．

$$A_0 := \bigsqcup_{\sigma \in W(\rho)} \sigma M,\ A_1 := \bigsqcup_{\sigma \in W(\rho^{-1})} \sigma M,\ A := A_0 \sqcup A_1$$
$$B_0 := \bigsqcup_{\sigma \in W(\tau)} \sigma M,\ B_1 := \bigsqcup_{\sigma \in W(\tau^{-1})} \sigma M,\ B := B_0 \sqcup B_1$$

と置けば，$X = A_0 \sqcup \rho A_1 = B_0 \sqcup \tau B_1 \supset A_0 \sqcup A_1 \sqcup B_0 \sqcup B_1$ であるから $A \sqcup B \subset X$ かつ $X \sim A \sim B$ となる． □

定義. $A, B \subset \mathbb{R}^3$ に対して二項関係 $\precsim$ を次のように定める．

$$A \precsim B \Longleftrightarrow \text{ある } B' \subset B \text{ が存在して } A \sim B'$$

命題 6 (Banach-Bernstein-Schröder の定理)**.** $A \precsim B$ かつ $B \precsim A$ ならば $A \sim B$.

証明. $A \sim B$ のとき，全単射 $f\colon A \longrightarrow B$ で「任意の $A' \subset A$ に対して $A' \sim f(A')$」を満たすものが取れることに注意しておく．

$A \precsim B$ かつ $B \precsim A$ とする．ある $A' \subset A$ と $B' \subset B$ が存在して $A \sim B'$ かつ $B \sim A'$ である．よって全単射 $f\colon A \longrightarrow B'$ と $g\colon A' \longrightarrow B$ で先の条件を満たすものが取れる．$A_0 := A \setminus A',\ A_{n+1} := g^{-1} \circ f(A_n), X := \bigsqcup_{n=0}^{\infty} A_n$ と定める．

$X \subset A,\ A \setminus X \subset A'$ だから $X \sim f(X),\ A \setminus X \sim g(A \setminus X)$ である．従って $A = X \sqcup (A \setminus X) \sim f(X) \sqcup g(A \setminus X) = B$ が分かる． □

命題 7. $\mathbb{R}^3$ の原点を中心とする回転がなす，G_3 の部分群を $SO(3)$ で表す．$SO(3)$ は F_2 と同型な部分群を持つ．

証明. $\theta = \arccos(\frac{1}{3})$ として，$\mathbb{R}^3$ の z 軸を軸とする θ ラジアンの回転を ρ，x 軸を軸とする θ ラジアンの回転を τ とすれば ρ, τ が生成する $SO(3)$ の部分群は ρ, τ が生成する自由群 F_2 であることが分かる． □

この命題により $F_2 \subset SO(3)$ とみなせば，F_2 は球面 S^2 に作用する．各元 $\sigma \in F_2$ の不動点 $x \in S^2$ は丁度 2 つある．よって $D := \{x \in S^2 \mid \text{ある } \sigma \in F_2 \text{ が存在して } \sigma x = x\}$

は可算集合である．このとき F_2 は $X := S^2 \setminus D$ に自由に作用する．故に命題 5 からある $A, B \subset X$, $A \cap B = \emptyset$ が存在して $A \sim X$ かつ $B \sim X$ である．A, B の取り方から $X \sim B \subset X \setminus A \subset X$，即ち $X \precsim X \setminus A$ かつ $X \setminus A \precsim X$ であるから命題 6 により $X \setminus A \sim X$ が分かる．改めて $B := X \setminus A$ と書き直せば $X = A \sqcup B \sim A \sim B$ が分かる．即ち，$S^2 \setminus D \sim (S^2 \setminus D) \oplus (S^2 \setminus D)$ である．

命題 8. $S^2 \sim S^2 \oplus S^2$

証明. $\sigma \in SO(3)$ で $D, \sigma D, \sigma^2 D, \cdots$ が互いに素となるものが存在する．

∵) D を通らない，原点を通る直線 $l \subset \mathbb{R}^3$ を一つ取る．正整数 $n > 0$ と $x \in D$ に対して

$$A(n, P) := \{\theta \in (0, 2\pi) \mid l \text{ を軸とする} \theta \text{ラジアン回転を} \sigma \text{とすれば} \sigma^n(P) \in D\}$$

と書くと $A(n, P)$ は可算集合である．故に $A := \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{P \in D} A(n, P)$ は可算集合である．

※ 可算和定理を使えば明らかであるが，選択公理を使わずに可算といえる．何故か? また，実は D が可算であるという部分でも同様の問題が発生している．

故に $(0, 2\pi) \setminus A \neq \emptyset$ であるから $\theta \in (0, 2\pi) \setminus A$ を一つ取り l を軸とする θ ラジアンの回転を $\sigma \in SO(3)$ とすればこれが条件を満たす．

このとき $Y := S^2 \setminus \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \sigma^n D \right)$ と置けば $S^2 = Y \sqcup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \sigma^n D \right) \sim Y \sqcup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \sigma^{n+1} D \right) = S^2 \setminus D$ である．故に $S^2 \sim S^2 \setminus D \sim (S^2 \setminus D) \oplus (S^2 \setminus D) \sim S^2 \oplus S^2$ となる． □

以上により次が証明された．

命題 9 (Banach-Tarski の定理)**.** $B \sim B \oplus B$ □

命題 10 (強 Banach-Tarski の定理)**.** 内部が空でない有界部分集合 $X, Y \subset \mathbb{R}^3$ に対して $X \sim Y$.

証明. 仮定によりある球体 K, L が存在して $X \subset K$ かつ $L \subset Y$ となる．$n \in \mathbb{N}$ を十分大きく取り，L の n 個のコピー $L_1, \cdots, L_n$ で K を被覆する．このとき $X \subset K \precsim L_1 \oplus \cdots \oplus L_n \sim L \subset Y$ より $X \precsim Y$ が分かる．同様にして $Y \precsim X$ だから $X \sim Y$ となる． □

ところで，Banach-Tarski の定理の証明で選択公理を使っている部分は命題 5 のみであった．実は命題 5 は Hahn-Banach の定理から導かれる．

定義． B をブール代数とする．
$\mu\colon B \longrightarrow [0,1]$ が B 上の有限加法的測度
$\Longleftrightarrow$ $\mu(1)=1$ かつ「$x \wedge y = 0 \Longrightarrow \mu(x \vee y) = \mu(x) + \mu(y)$」．

定理． Hahn-Banach の定理
$\Longleftrightarrow$ 任意のブール代数 B について B 上の有限加法的測度が存在する． $\square$

定理． Hahn-Banach の定理 $\Longrightarrow$ 命題 5

証明． 命題 5 の証明の X/R を考える．$U \in X/R$ に対してブール代数 $B_U := \mathcal{P}(U)$ を考え，ブール代数の直和 $B := \displaystyle\bigoplus_{U \in X/R} B_U$ を取る．$i_U\colon B_U \longrightarrow B$ を標準埋込とする．Hahn-Banach の定理により，B 上の有限加法的測度 μ が取れる．$\mu_U := \mu \circ i_U$ と置く．$V(\sigma) := \{x_1 \cdots x_n \in F_2 \mid x_n = \sigma\}$ として

$$\begin{aligned}
X_1 &:= \{x \in X \mid \mu_{[x]}(V(\rho)x) > 1/2\} \\
X_2 &:= \{x \in X \mid \mu_{[x]}(V(\tau)x) > 1/2\} \\
X_3 &:= \{x \in X \mid \mu_{[x]}(V(\rho^{-1})x) > 1/2\} \\
X_4 &:= \{x \in X \mid \mu_{[x]}(V(\tau^{-1})x) > 1/2\} \\
Y_1 &:= X \setminus (\rho X_1 \cup \tau X_2) \\
Y_2 &:= X \setminus (\rho^{-1} X_3 \cup \tau^{-1} X_4)
\end{aligned}$$

と定める．$X = \rho X_1 \cup \tau X_2 \cup \rho^{-1} X_3 \cup \tau^{-1} X_4$ である．

$\because$) 任意の $x \in X$ を取る．$V(\rho)x, V(\tau)x, V(\rho^{-1})x, V(\tau^{-1})x \subset [x]$ は互いに素だから $\mu_{[x]}(V(\rho)x) + \mu_{[x]}(V(\tau)x) + \mu_{[x]}(V(\rho^{-1})x) + \mu_{[x]}(V(\tau^{-1})x) \leq 1$ となる．よってこの 4 つのうち少なくとも 1 つは $< \frac{1}{2}$ となる．

どの場合でも同様なので $\mu_{[x]}(V(\rho)x) < \frac{1}{2}$ だとする．$F_2 = V(\rho) \sqcup V(\rho^{-1})\rho$ だから $\mu_{[x]}(V(\rho)x) + \mu_{[x]}(V(\rho^{-1})\rho x) = 1$ となるので，$\mu_{[x]}(V(\rho^{-1})\rho x) > \frac{1}{2}$ である．故に $\rho x \in X_3$，即ち $x \in \rho^{-1} X_3$ である．以上により $X = \rho X_1 \cup \tau X_2 \cup \rho^{-1} X_3 \cup \tau^{-1} X_4$ が分かった．

従って $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$ である．また明らかに X_1, X_2, X_3, X_4 は互いに素である．
Y_1 と X_1 は互いに素である．

$\because$) $V(\rho) \subset V(\tau)\tau^{-1}$ だから

$$\begin{aligned} X_1 &= \{x \in X \mid \mu_{[x]}(V(\rho)x) > 1/2\} \\ &\subset \{x \in X \mid \mu_{[x]}(V(\tau)\tau^{-1}x) > 1/2\} \\ &= \{\tau x \in X \mid \mu_{[x]}(V(\tau)x) > 1/2\} = \tau X_2 \end{aligned}$$

である．よって $Y_1 \cap X_1 = \emptyset$.

同様にして $i = 1, 2,\ j = 1, 2, 3, 4$ に対して $Y_i \cap X_j = \emptyset$ が分かる．

$X_2' \subset X_2,\ X_4' \subset X_4$ を $\rho X_1 \cup \tau X_2 = \rho X_1 \sqcup \tau X_2',\ \rho^{-1}X_3 \cup \tau^{-1}X_4 = \rho^{-1}X_3 \sqcup \tau^{-1}X_4'$ となるように取る．$A = X_1 \sqcup X_2' \sqcup Y_1,\ B := X_3 \sqcup X_4' \sqcup Y_2$ と置けば $A \sqcup B \subset X$ かつ $X \sim A,\ X \sim B$ である． □

系． Hahn-Banach の定理 $\Longrightarrow$Banach-Tarski の定理 □

Banach-Tarski の証明から得られる B の分割の仕方を見ると，この分割が物理的に可能であったとしても，物理的に移動させることが不可能のようにみえる．そこで，《物理的な移動まで含めた分割合同》というものを考えてみる．

定義． $X, Y \subset \mathbb{R}^3$ とする．
$X \approx Y \Longleftrightarrow n \in \mathbb{N},\ X_i, Y_i \subset \mathbb{R}^3$，連続写像 $\gamma_i \colon [0,1] \longrightarrow G_3\ (0 \le i \le n)$ が存在して以下を満たす．

- $X = X_0 \sqcup \cdots \sqcup X_n$
- $Y = Y_0 \sqcup \cdots \sqcup Y_n$
- $\gamma_i(0) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$
- $Y_i = \gamma_i(1)X_i$
- $i \neq j$ ならば，任意の $t \in [0,1]$ に対して $\gamma_i(t)X_i \cap \gamma_j(t)X_j = \emptyset$.

命題 11. $\approx$ は同値関係である． □

定義． $u \in \mathbb{R}^3$ に対して $\sigma_u \in G_3$ を $\sigma_u(x) = x + u$ で定める．

命題 12. $X, Y \subset \mathbb{R}^3$ を有界部分集合とし，$u, v \in \mathbb{R}^3$ を $X \cap \sigma_u Y = \emptyset,\ X \cap \sigma_v Y = \emptyset$ となるように取る．このとき $X \sqcup \sigma_u Y \approx X \sqcup \sigma_v Y$

証明． 第一成分への射影を $\pi_1 \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ で表すとする．まず u, v が $\sup \pi_1(X) < \inf \pi_1(\sigma_u Y), \inf \pi_1(\sigma_v Y)$ を満たしているならば明らかに $X \sqcup \sigma_u Y \approx X \sqcup \sigma_v Y$ であるこ

とに注意しておく．

ある $S_0, S_1 \subset \mathbb{R}$ が存在して $\mathbb{R} = S_0 \sqcup S_1$ かつ $\Delta S_i := \{x - y \mid x, y \in S_i\} \subset \mathbb{R}$ が codense とできる．

∵) $K := \displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}\mathbb{Z},\ H := K + \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ と置く．選択公理により $\mathbb{R}/H$ の完全代表系 M を取る．このとき $S_0 := \displaystyle\bigcup_{r \in M} (r + K),\ S_1 = S_0 + \frac{1}{2}$ と置けば明らかに $\mathbb{R} = S_1 \cup S_2$ である．

$a \in \Delta S_0$ を取る．$x, y \in S_0$ を使って $a = x - y$ と書け，更に $x = r_x + k_x,\ y = r_y + k_y\ (r_x, r_y \in M,\ k_x, k_y \in K)$ と書ける．$a \in H$ とすると $r_x - r_y = a - k_x + k_y \in H$ だから，M の取り方により $r_x = r_y$ である．従って $a = k_x - k_y \in K$ となる．故に $\Delta S_0 \cap (H \setminus K) = \emptyset$，即ち $\Delta S_0 \cap (K + \frac{1}{2}) = \emptyset$ が分かる．従って $\mathbb{R} \setminus \Delta S_0 \supset (K + \frac{1}{2})$ だから $\mathbb{R} \setminus \Delta S_0 \subset \mathbb{R}$ は稠密である．S_1 についても同様.

codense だから，0 へ収束する実数列 $\{a_n^{(i)}\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R} \setminus \Delta S_i$ が取れる．

$i, j \in \{0, 1\}$ に対して $S_{ij} := S_i \times S_j \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ と置く．$r > 0$ を $\sup \pi_1(X) < \inf \pi_1(Y) + r$ となるように十分大きく取り，$v_{ij,k} \in \mathbb{R}^3$ を

$$v_{ij,0} := (r, a_0^{(j)}, 0),\ v_{ij,2k+1} = (a_k^{(i)}, a_k^{(j)}, 0),\ v_{ij,2k+2} = (a_k^{(i)}, a_{k+1}^{(j)}, 0)$$

で定める．連続写像 $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ を

$$\gamma_{ij}(t) := \begin{cases} 0 & (t = 0\ \text{のとき}) \\ \text{線分}\ v_{ij,k+1}v_{ij,k}\text{上の点} & (\frac{1}{2^{k+1}} \le t \le \frac{1}{2^k}\text{のとき}) \end{cases}$$

を満たすように定める．$0 < t \le 1$ のとき $\gamma_{ij}(t) \notin \Delta S_i \times \Delta S_j \times \mathbb{R}$ である．これにより連続写像 $\sigma_{\gamma_{ij}(t)}\colon [0,1] \longrightarrow G_3$ が定まるが，簡単のためこれも $\gamma_{ij}(t)$ で表す．

$X_{ij} := X \cap S_{ij},\ Y_{ij} := \sigma_u Y \cap S_{ij}$ と置けば $X \sqcup \sigma_u Y = X_{00} \sqcup X_{01} \sqcup X_{10} \sqcup X_{11} \sqcup Y_{00} \sqcup Y_{01} \sqcup Y_{10} \sqcup Y_{11}$ であり，γ の定義から $0 \le t \le 1$ に対して $X_{ij} \cap \gamma_{ij}(t)(Y_{ij}) = \emptyset$ である．故に $X_{ij} \sqcup Y_{ij} \approx X_{ij} \sqcup (\gamma_{ij}(1)Y_{ij})$ となる．

s を $s > \sup\{d(x,y) \mid x, y \in X \cup (Y + u)\}$ となるように取り

$$\begin{aligned} \sigma_{00} &:= \sigma(0,0,0) \\ \sigma_{01} &:= \sigma(0,0,s) \\ \sigma_{10} &:= \sigma(0,0,2s) \\ \sigma_{11} &:= \sigma(0,0,3s) \end{aligned}$$

と定める．このとき明らかに

$$\begin{aligned}
X \sqcup (Y+u) &\approx \bigsqcup_{i,j=0}^{1} \sigma_{ij}(X_{ij} \sqcup Y_{ij}) \\
&\approx \bigsqcup_{i,j=0}^{1} \sigma_{ij}(X_{ij}) \sqcup \gamma_{ij}(1) \circ \sigma_{ij}(Y_{ij}) \\
&\approx \bigsqcup_{i,j=0}^{1} \sigma_{ij}^{-1}(\sigma_{ij}(X_{ij}) \sqcup \gamma_{ij}(1) \circ \sigma_{ij}(Y_{ij})) \\
&= X \sqcup (Y + u + (r, b_0, 0))
\end{aligned}$$

である．同様にして $(X \sqcup (Y+v)) \approx X \sqcup (Y + v + (r, b_0, 0))$ であり，一番初めの注意と r の取り方に気をつければ

$$X \sqcup (Y+u) \approx X \sqcup (Y + u + (r, b_0, 0)) \approx X \sqcup (Y + v + (r, b_0, 0)) \approx X \sqcup (Y+v)$$

となる． □

命題 13. $X_0, X_1 \subset \mathbb{R}^3$ を互いに素な有界集合，$\sigma_0, \sigma_1 \in G_3$，$\sigma_0 X_0 \cap \sigma_1 X_1 = \emptyset$ とするとき $X_0 \sqcup X_1 \approx \sigma_0 X_0 \sqcup \sigma_1 X_1$.

証明. 十分大きい r を取れば明らかに $X_0 \sqcup (X_1 + r) \approx \sigma_0 X_0 \sqcup (\sigma_1 X_1 + r)$ とできる．故に

$$X_0 \sqcup X_1 \approx X_0 \sqcup (X_1 + r) \approx \sigma_0 X_0 \sqcup (\sigma_1 X_1 + r) \approx \sigma_0 X_0 \sqcup \sigma_1 X_1.$$

□

命題 14. 内部が空でない有界部分集合 $X, Y \subset \mathbb{R}^3$ に対して $X \approx Y$

証明. 命題 10 によりある分割 $X = X_0 \sqcup \cdots \sqcup X_n$, $Y = Y_0 \sqcup \cdots \sqcup Y_n$ と $\sigma_i \in G_3$ が存在して $\sigma_i X_i = Y_i$ となる．故に前命題を繰り返し使用して

$$X = X_0 \sqcup \cdots \sqcup X_n \approx \sigma_0 X_0 \sqcup \cdots \sqcup \sigma_n X_n = Y.$$

□

参考文献

[1] Stan Wagon, The Banach-Tarski Paradox, Cambridge University Press, 1994

[2] Janusz Pawlikowski, The Hahn-Banach theorem implies the Banach-Tarski paradox, Fundamenta Mathematicae 138 (1991), 21–22

[3] Trevor M. Wilson, A continuous movement version of the Banach-Tarski paradox: A solution to de Groot's Problem, J. Symbolic Logic 70 (2005), 946–952