Alexandroff-Urysohn-コンパクトと選択公理

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2016 年 12 月 29 日

定義. 集合族 $\mathcal{A}$ に対し $\bigcap\mathcal{A} := \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A$, $\bigcup\mathcal{A} := \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$ と書く.

定義. X を位相空間とする.

1. $x \in X$ が $A \subset X$ の完全集積点 (complete accumulation point)
$\iff$ x の任意の開近傍 U に対し $|A| = |A \cap U|$ となる.
2. X が Alexandroff-Urysohn-コンパクト
$\iff$ X の無限部分集合は完全集積点を持つ.
3. X が Tychonoff-コンパクト $\iff$ X が閉区間 $[0, 1]$ の直積空間の閉部分空間と同相

定理 1. 以下の命題は (ZF 上) 同値.

1. 選択公理
2. コンパクト $\Longrightarrow$ Alexandroff-Urysohn-コンパクト.
3. コンパクト $\iff$ Alexandroff-Urysohn-コンパクト.
4. Alexandroff-Urysohn-コンパクト空間の有限和は Alexandroff-Urysohn-コンパクト.
5. 開集合が有限個の位相空間は Alexandroff-Urysohn-コンパクト.
6. 密着位相空間の有限和は Alexandroff-Urysohn-コンパクト.

証明. ($1 \Longrightarrow 2$) $(X, \mathcal{O})$ をコンパクトとし無限部分集合 $A \subset X$ を取る．A は完全集積点を持たないと仮定する．すると任意の $x \in X$ に対しある開近傍 $U \subset X$ が存在して $|A| > |A \cap U|$ となる．よって開集合の族 $\mathcal{U} := \{U \in \mathcal{O} \mid |A| > |A \cap U|\}$ は開被覆である．X はコンパクトだからある $U_1, \cdots, U_n \in \mathcal{U}$ が存在して $X = U_1 \cup \cdots \cup U_n$ と書ける．故に $A = (A \cap U_1) \cup \cdots \cup (A \cap U_n)$ となる．よって選択公理により $|A \cap U_1| + \cdots + |A \cap U_n| <$

$|A|+\cdots+|A|=|A|$ であるから $|A| \leq |A\cap U_1|+\cdots+|A\cap U_n| < |A|$ となり矛盾.

※ 選択公理 $\Longleftrightarrow$「$|A_1|<|A_2|$, $|B_1|<|B_2| \Longrightarrow |A_1|+|B_1|<|A_2|+|B_2|$」である. また $|A|+|A|=|A|$ の証明も選択公理を使う.

($2 \Longrightarrow 5$) 開集合が有限個しかない空間はコンパクトだから明らか.

($5 \Longrightarrow 6$) 密着位相空間の有限和は開集合が有限個なので明らか.

($6 \Longrightarrow 1$) 濃度の比較可能性を示す. A と B を互いに素な無限集合とする. A と B に密着位相をいれ, $X := A \cup B$ とする. 仮定 6 より X は Alexandroff-Urysohn-コンパクトとなる. よって X は完全集積点 $x \in X$ を持つ. $x \in A$ としても一般性を失わない. このとき A は x の開近傍だから $|X|=|X\cap A|=|A|$. 故に $|B| \leq |X| = |A|$ となり, $|A|$ と $|B|$ は比較可能である.

($1 \Longrightarrow 3$) 既に ($1 \Longrightarrow 2$) で示したように「コンパクト $\Longrightarrow$ Alexandroff-Urysohn-コンパクト」である. よって「Alexandroff-Urysohn-コンパクト $\Longrightarrow$ コンパクト」を示せばよい.

X を Alexandroff-Urysohn-コンパクトとする. 閉集合からなる族 $\mathcal{A}$ が 有限交差性を持つとする. $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$ を示せばよい. 基数 $\kappa := |\mathcal{A}|$ に関する超限帰納法で示す. (選択公理により, $\mathcal{A}$ が整列可能なことに注意する.)

まず, κ が有限基数のときは明らかである. なので κ は無限基数であるとする. 次の条件を満たす $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ が存在する.

(a) $\mathcal{B}$ は有限交差性を持つ.
(b) $(\mathcal{B}, \supset)$ は整列順序集合である.
(c) $\bigcap \mathcal{B} = \bigcap \mathcal{A}$

$\because$) $\varphi : \kappa \longrightarrow \mathcal{A}$ を全単射とする. $\alpha < \kappa$ に対し, 閉集合の族 $\{\varphi(\beta) \mid \beta < \alpha\} \subset \mathcal{A}$ は有限交差性を持つ. $\left|\{\varphi(\beta) \mid \beta < \alpha\}\right| = |\alpha| < \kappa$ だから帰納法の仮定より $F_\alpha := \bigcap_{\beta<\alpha} \varphi(\beta)$ は空でない. そこで $\mathcal{B} := \{F_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ と置く. 明らかに (a) と (c) が成立する. $F \in \mathcal{B}$ に対し $f(F) := \min\{\alpha < \kappa \mid F_\alpha = F\}$ として $f : \mathcal{B} \longrightarrow \kappa$ を定める. f は明らかに単射. U_α の定義より $\alpha_1 < \alpha_2 < \kappa$ に対し $F_{\alpha_1} \supset F_{\alpha_2}$ である. よって $f : (\mathcal{B}, \supset) \longrightarrow (\kappa, \leq)$ は順序を保つことが分かる. そこで f により $\mathcal{B}$ を κ の部分順序集合とみなせば, $(\mathcal{B}, \supset)$ の整列性が分かる.

このとき $\bigcap \mathcal{B} \neq \emptyset$ を示せばよい. $|\mathcal{B}| < \kappa$ のときは帰納法の仮定より成立するので, $|\mathcal{B}| = \kappa$ とする.

$(\mathcal{B}, \supset)$ が整列順序だから，$F \in \mathcal{B}$ に対し $\widetilde{F} := \{G \in \mathcal{B} \mid F \supsetneq G\} \subset \mathcal{B}$ は最小元 (即ち $\subset$ についての最大元) を持つ．それを $S(F)$ と置く．明らかに $F \supsetneq S(F)$ である．そこで集合族 $\{F \setminus S(F)\}_{F\in\mathcal{B}}$ に選択公理を適用して選択関数 $g : \mathcal{B} \longrightarrow \bigcup(F \setminus S(F)) \subset X$ を得る．$Y := g(\mathcal{B})$ と置く．$|Y| = |\mathcal{B}| = \kappa$ は無限基数だから，Y は完全集積点 $x \in X$ を持つ．任意の $F \in \mathcal{B}$ に対し $x \in \overline{F}$ である．

∵) x の開近傍 $U \subset X$ に対し $|g^{-1}(Y \cap U)| = |Y \cap U| = |Y| = \kappa$ だから，$g^{-1}(Y \cap U) \subset \mathcal{B}$ は非有界部分集合である．故に $F \supsetneq G$ となる $G \in g^{-1}(Y \cap U)$ が存在する．このとき $g(G) \in Y \cap U \subset U$ だから $g(G) \in U \cap (G \setminus S(G)) \subset U \cap F$, 従って $U \cap F \neq \emptyset$ となる．

F は閉集合だから $\overline{F} = F$，よって $x \in \displaystyle\bigcap_{F\in\mathcal{B}} \overline{F} = \bigcap \mathcal{B}$ である．

$(3 \Longrightarrow 4)$ 仮定 3 と「コンパクト空間の有限和がコンパクト」であることから明らか．

$(4 \Longrightarrow 6)$ 密着位相空間は Alexandroff-Urysohn-コンパクトなので明らか． □

定理 2. 以下の命題は (ZF 上) 同値.

1. 選択公理
2. Alexandroff-Urysohn-コンパクト空間の直積は Alexandroff-Urysohn-コンパクト.
3. Alexandroff-Urysohn-コンパクト空間の有限直積は Alexandroff-Urysohn-コンパクト.
4. 開集合が有限個な空間の直積は Alexandroff-Urysohn-コンパクト.
5. 有限離散位相の直積は Alexandroff-Urysohn-コンパクト.
6. 離散位相空間 $\mathbf{2} := \{0, 1\}$ の直積は Alexandroff-Urysohn-コンパクト.

証明. $(1 \Longrightarrow 2)$ 定理 1 の条件 3 (コンパクト $\Longleftrightarrow$ Alexandroff-Urysohn-コンパクト) と Tychonoff の定理により明らか.

$(2 \Longrightarrow 3)$ 明らか.

$(3 \Longrightarrow 1)$ 濃度の比較可能性を示す．その為に A と B を任意の無限集合とし，$X := A \cup B$ に密着位相を入れる．X と $\mathbf{2}$ は共に Alexandroff-Urysohn-コンパクトだから，仮定 3 により $X \times \mathbf{2}$ も Alexandroff-Urysohn-コンパクトとなる．よって部分集合 $C := (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\}) \subset X \times \mathbf{2}$ は完全集積点 (x, y) を持つ．$y = 0$ としても一般性を失わない．すると $X \times \{0\}$ は $(x, 0)$ の開近傍だから $|C| = |C \cap (X \times \{0\})|$ となる．従って $|A| = |A \times \{0\}| = |C \cap (X \times \{0\})| = |C| = |A \cup B| \geq |B|$.

$(1 \Longrightarrow 4)$ 定理 1 の条件 5 より，開集合が有限個の空間は Alexandroff-Urysohn-コン

パクトである．よって既に同値性が示された条件 2 により 4 が分かる．

4 $\Longrightarrow$ 5 と 5 $\Longrightarrow$ 6 は明らか．

(6 $\Longrightarrow$ 1) 濃度の比較可能性を示す．その為に A と B を任意の無限集合とし，A にも B にも含まれない元 $\infty \notin A \cup B$ を用意する．$X := A \cup B \cup \{\infty\}$ と置き，直積 $\mathbf{2}^X$ を考える．仮定 6 より $\mathbf{2}^X$ は Alexandroff-Urysohn-コンパクトである．部分集合 $Y \subset X$ の特性関数を $\chi_Y \in \mathbf{2}^X$ と表す．即ち

$$\chi_Y(x) = \begin{cases} 0 & (x \notin Y \text{ のとき}) \\ 1 & (x \in Y \text{ のとき}) \end{cases}$$

である．$\widetilde{A} := \{\chi_{\{a\}} \mid a \in A\}$，$\widetilde{B} := \{\chi_{\{a,\infty\}} \mid a \in B\}$ と書く．$\widetilde{A} \cup \widetilde{B} \subset \mathbf{2}^X$ は無限集合であるから，完全集積点 $f \in \mathbf{2}^X$ を持つ．

(i) $f(\infty) = 0$ のとき

$U := \{g \in \mathbf{2}^X \mid g(\infty) = 0\} \subset \mathbf{2}^X$ は f の開近傍だから $|\widetilde{A} \cup \widetilde{B}| = |(\widetilde{A} \cup \widetilde{B}) \cap U|$ が成り立つ．故に $|B| = |\widetilde{B}| \leq |\widetilde{A} \cup \widetilde{B}| = |(\widetilde{A} \cup \widetilde{B}) \cap U| = |\widetilde{A}| = |A|$.

(ii) $f(\infty) = 1$ のとき

$U := \{g \in \mathbf{2}^X \mid g(\infty) = 1\} \subset \mathbf{2}^X$ は f の開近傍だから $|\widetilde{A} \cup \widetilde{B}| = |(\widetilde{A} \cup \widetilde{B}) \cap U|$ が成り立つ．故に $|A| = |\widetilde{A}| \leq |\widetilde{A} \cup \widetilde{B}| = |(\widetilde{A} \cup \widetilde{B}) \cap U| = |\widetilde{B}| = |B|$.

(i)(ii) より $|A|$ と $|B|$ は比較可能である． □

定理 3. 以下の命題は (ZF 上) 同値.

1. 選択公理
2. Tychonoff-コンパクト空間は Alexandroff-Urysohn-コンパクト．
3. $[0,1]$ の直積は Alexandroff-Urysohn-コンパクト．

証明. (1 $\Longrightarrow$ 2) X を Tychonoff-コンパクト空間とする．X は $[0,1]^\Lambda$ の閉部分空間とみなしてよい．Tychonoff の定理により $[0,1]^\Lambda$ はコンパクトとなる．よってコンパクト空間の閉部分空間である X もコンパクトである．定理 1 の条件 2 (コンパクトならば Alexandroff-Urysohn-コンパクト) により X は Alexandroff-Urysohn-コンパクトである．

(2 $\Longrightarrow$ 3) $[0,1]^\Lambda$ は Tychonoff-コンパクトだから明らか.

(3 $\Longrightarrow$ 1) 濃度の比較可能性を示す．その為に A と B を任意の無限集合とし，A にも B にも含まれない元 $\infty \notin A \cup B$ を用意する．$X := A \cup B \cup \{\infty\}$ と置き，直積 $[0,1]^X$ を考える．仮定 3 より $[0,1]^X$ は Alexandroff-Urysohn-コンパクトである．部分集合 $Y \subset X$

の特性関数を $\chi_Y \in [0,1]^X$ と表す．即ち

$$\chi_Y(x) = \begin{cases} 0 & (x \notin Y \text{ のとき}) \\ 1 & (x \in Y \text{ のとき}) \end{cases}$$

である．$\widetilde{A} := \{\chi_{\{a\}} \mid a \in A\}$，$\widetilde{B} := \{\chi_{\{a,\infty\}} \mid a \in B\}$ と書く．$\widetilde{A} \cup \widetilde{B} \subset [0,1]^X$ は無限集合であるから，完全集積点 $f \in [0,1]^X$ を持つ．

(i) $f(\infty) \leq \frac{1}{2}$ のとき
$U := \{g \in [0,1]^X \mid 0 \leq g(\infty) < \frac{2}{3}\} \subset [0,1]^X$ は f の開近傍だから $|\widetilde{A} \cup \widetilde{B}| = |(\widetilde{A} \cup \widetilde{B}) \cap U|$ が成り立つ．故に $|B| = |\widetilde{B}| \leq |\widetilde{A} \cup \widetilde{B}| = |(\widetilde{A} \cup \widetilde{B}) \cap U| = |\widetilde{A}| = |A|$.

(ii) $f(\infty) > \frac{1}{2}$ のとき
$U := \{g \in [0,1]^X \mid \frac{1}{2} < g(\infty) \leq 1\} \subset [0,1]^X$ は f の開近傍だから $|\widetilde{A} \cup \widetilde{B}| = |(\widetilde{A} \cup \widetilde{B}) \cap U|$ が成り立つ．故に $|A| = |\widetilde{A}| \leq |\widetilde{A} \cup \widetilde{B}| = |(\widetilde{A} \cup \widetilde{B}) \cap U| = |\widetilde{B}| = |B|$.

(i)(ii) より $|A|$ と $|B|$ は比較可能である． $\square$

参考文献

[1] Horst Herrlich, Axiom of Choice, Springer, 2006

[2] ケネス・キューネン,『集合論-独立性証明への案内』, 藤田博司訳, 日本評論社, 2008