# 代数閉包の存在と一意性

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2012 年 1 月 17 日

**命題.** 選択公理を仮定する．任意の体 $k$ に対し代数閉包 $\overline{k}/k$ が一意に存在する．

**証明.** まず存在を示す．$A := \{f \in k[x] \mid f$ は既約多項式，最高次係数は $1\}$ と置く．各 $f \in A$ に対し $n_f := \deg f$ 個の不定元 $x_1^{(f)}, \cdots, x_{n_f}^{(f)}$ を用意し，$X := \{x_i^{(f)} \mid f \in A,\ 1 \leq i \leq n_f\}$ とする．$g_f(x) := (x - x_1^{(f)}) \cdots (x - x_{n_f}^{(f)}) - f(x) \in k[X][x]$ を展開して

$$g_f(x) = a_{n_f-1}^{(f)} x^{n_f-1} + \cdots + a_1^{(f)} x + a_0^{(f)} \quad (a_i^{(f)} \in k[x_1^{(f)}, \cdots, x_{n_f}^{(f)}])$$

と表す．$\{a_i^{(f)} \mid f \in A,\ 0 \leq i \leq n_f - 1\}$ で生成されるイデアルを $I$ とする．$I \subset k[X]$ は真のイデアルである．

∵) $I = k[X]$ と仮定する．$1 \in I$ であるから $f_j \in A$ と $b_j \in k[X]$ を

$$1 = b_1 a_{i_1}^{(f_1)} + \cdots + b_n a_{i_n}^{(f_n)}$$

となるように取れる．簡単のため $a_j := a_{i_j}^{(f_j)}$ と書く．$L/k$ を $f_1, \cdots, f_n \in k[x]$ が完全に分解されるような体とする．$f_j$ の根全体を $\alpha_1^{(j)}, \cdots, \alpha_{n_{f_j}}^{(j)} \in L$ として，$a_j = a_j(x_1^{(f_j)}, \cdots, x_{n_{f_j}}^{(f_j)})$ に $x_i^{(f_j)} = \alpha_i^{(j)}$ を代入すると定義から明らかに $a_j(\alpha_1^{(j)}, \cdots, \alpha_{n_{f_j}}^{(j)}) = 0$．故に $1 = 0$ となり矛盾する．

故に選択公理より $I \subset \mathfrak{m} \subsetneq k[X]$ なる極大イデアル $\mathfrak{m}$ が存在する．$\overline{k} := k[X]/\mathfrak{m}$ と置く．$\overline{k}$ は自然に $k$ の拡大体とみなせる．明らかに $\overline{k}/k$ は代数拡大である．

$\overline{k}$ が代数閉体でないと仮定する．2 次以上の既約多項式 $f \in \overline{k}[x]$ が存在する．$L := \overline{k}[x]/(f)$ と置けば $L/\overline{k}$ は有限次拡大で $f$ の根 $\alpha \in L$ を含む．勿論 $\alpha$ は $\overline{k}$ 上代数的で，故に $k$ 上代数的でもある．従って $g(\alpha) = 0$ となる多項式 $g \in k[x]$ が存在する．このとき $g$ は $\overline{k}[x]$ で完全に分解するから $\alpha \in \overline{k}$ となる．これは $f$ が 2 次以上の既約多項式であるこ

とに矛盾する．故に $\overline{k}/k$ は代数閉包である．

次に一意性を示す．$\Omega/k$ も代数閉包であるとする．

$$A := \{(K,\varphi) \mid k \subset K \subset \overline{k}\ \text{は中間体},\ \varphi : K \longrightarrow \Omega\text{は中への同型}\ \}$$

として $A$ に順序関係 $\leq$ を

$$(K,\varphi) \leq (L,\psi) \iff K \subset L,\ \psi|_K = \varphi$$

で定める．Zorn の補題により $A$ は極大元 $(K,\varphi)$ を持つ．極大性から $K = \overline{k}$ である．また $\varphi(\overline{k})$ は明らかに代数閉体だから, $\varphi(\overline{k}) \subset \Omega$ より $\varphi(\overline{k}) = \Omega$ が分かる．故に $\varphi : \overline{k} \longrightarrow \Omega$ は同型である． □

この命題は ZF では証明できないことが知られている．但し，体 $k$ の濃度を可算に制限すれば，代数閉包の「存在」は ZF で証明できる．

**命題.** 濃度が可算な体 $k$ に対し代数閉包 $\overline{k}/k$ が存在する．

**証明.** 全単射 $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow k$ を取る．$\alpha_n := \varphi(n)$ と書く．

$$\begin{aligned} A_n &:= \{\alpha_{i_n}x^n + \cdots + \alpha_{i_1}x + \alpha_{i_0} \in k[x] \mid 0 \leq i_j \leq n\} \\ B_n &:= A_n \setminus (A_0 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \end{aligned}$$

と置くと $k[x] = \displaystyle\bigsqcup_{n=0}^{\infty} B_n$ であり，各 $B_n$ は有限集合で，辞書式に順序を入れることができる．よって $k[x]$ は可算集合である．従って $A := \{f \in k[x] \mid f$ は既約多項式，最高次係数は $1\}$ も可算だから全単射 $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow A$ が得られる．$f_n := \psi(n)$ と置く．$K_0 := k$ として $K_{n+1}/K_n$ を $f_n \in k[x]$ の最小分解体とする．$\overline{k} := \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$ とすれば $\overline{k}/k$ は代数閉包である． □

※ 多項式から最小分解体を得る定まった方法があるため，$\{K_n\}_n$ の定義には選択公理は必要ないことに注意する．

一方, 代数閉包の一意性は濃度が可算であっても ZF では証明できないことが $(\mathrm{AC}(2)_{\aleph_0}$ が ZF で証明できないことを認めれば) 次の命題から分かる．

**命題.** 濃度が可算な体 $k$ に対し代数閉包 $\overline{k}/k$ が一意に存在する
$\Longrightarrow$ 二元集合の族 $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ は選択関数を持つ

**証明.** まず準備として，$p_n$ を $n+1$ 番目の素数とする ($p_0=2,\ p_1=3,\cdots$)．可算個の不定元を持つ多項式環 $R:=\mathbb{Q}[x_0,x_1,\cdots]$ を考える．$I\subset R$ を $\{x_n^2-p_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ で生成されるイデアルとすれば，$I\subset R$ は極大イデアルである．よって $K:=R/I$ は $\mathbb{Q}$ の代数拡大体となる．$K$ の代数閉包 $\overline{K}$ は勿論 $\mathbb{Q}$ の代数閉包でもあるから仮定より $\overline{K}\cong\overline{\mathbb{Q}}$.

さて $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ を二元集合の族とする．各 $X_n$ は互いに素としてよい．$X:=\bigcup_{n=0}^{\infty}X_n$ と置いて多項式環 $\mathbb{Q}[X]$ を考える．$f_n,g_n\in\mathbb{Q}[X]$ を

$$f_n:=\sum_{x\in X_n}x,\quad g_n:=\prod_{x\in X_n}x+p_n$$

で定める．$J\subset\mathbb{Q}[X]$ を $\{f_n\mid n\in\mathbb{N}\}\cup\{g_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ で生成されるイデアルすれば $J\subset\mathbb{Q}[x]$ は極大イデアルである．よって $L:=\mathbb{Q}[X]/J$ は $\mathbb{Q}$ の代数拡大体となり，先ほどと同様に $\overline{L}\cong\overline{\mathbb{Q}}$ である．故に $\overline{L}\cong\overline{K}$ だから，同型写像 $\varphi:\overline{L}\longrightarrow\overline{K}$ が存在する．任意の $x\in X$ を取る．ある $n\in X_n$ が存在して $x\in X_n$ である．$|X_n|=2$ だから $X_n=\{x,y\}$ と書くと

$$(x+J)^2=x^2+J=-xy+J=p_n+J$$

だから $\varphi((x+J)^2)=\varphi(p_n+J)=p_n+I=x_n^2+I$ より $\varphi(x+J)=\pm x_n+I$ でなければならない．このとき勿論 $\varphi(y+J)=\mp x_n+I$ である．従って各 $n\in\mathbb{N}$ に対し，ある $x\in X_n$ が一意に存在して $\varphi(x+J)=x_n+I$ となる．そこで

$$f(n):=(\varphi(x+J)=x_n+I\ \text{となる}\ x\in X_n)$$

とすれば $f:\mathbb{N}\longrightarrow X$ が選択関数である． □

# 参考文献


[1] Bernhard Banaschewski, Algebraic Closure without Choice¡/a¿, Mathematical Logic Quarterly 38 (1992), 383–385, `http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/malq.19920380136/abstract`

[2] Choice and algebraic closure