代数閉包の存在と一意性

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2023 年 12 月 20 日

命題 1. 選択公理を仮定する．任意の体 k に対して代数閉包 $\overline{k}/k$ が一意に存在する．

証明. まず存在を示す．$A := \{f \in k[x] \mid f$ は既約多項式，最高次係数は $1\}$ と置く．各 $f \in A$ に対して $n_f := \deg f$ 個の不定元 $x_1^{(f)}, \cdots, x_{n_f}^{(f)}$ を用意して，

$$X := \{x_i^{(f)} \mid f \in A,\ 1 \leq i \leq n_f\}$$

とする．$g_f(x) := (x - x_1^{(f)}) \cdots (x - x_{n_f}^{(f)}) - f(x) \in k[X][x]$ を展開して

$$g_f(x) = a_{n_f-1}^{(f)} x^{n_f-1} + \cdots + a_1^{(f)} x + a_0^{(f)} \quad (a_i^{(f)} \in k[x_1^{(f)}, \cdots, x_{n_f}^{(f)}])$$

と表す．$\{a_i^{(f)} \mid f \in A,\ 0 \leq i \leq n_f - 1\}$ で生成されるイデアルを I とする．$I \subset k[X]$ は真のイデアルである．

$\because$) $I = k[X]$ と仮定する．$1 \in I$ であるから番号 $i_1, \cdots, i_n$ と $f_j \in A$ と $b_j \in k[X]$ を

$$1 = b_1 a_{i_1}^{(f_1)} + \cdots + b_n a_{i_n}^{(f_n)}$$

となるように取れる．簡単のため $a_j := a_{i_j}^{(f_j)}$ と書く．L/k を $f_1, \cdots, f_n \in k[x]$ が完全に分解されるような拡大体とする．f_j の根全体を $\alpha_1^{(j)}, \cdots, \alpha_{n_{f_j}}^{(j)} \in L$ として，$a_j = a_j(x_1^{(f_j)}, \cdots, x_{n_{f_j}}^{(f_j)})$ に $x_i^{(f_j)} = \alpha_i^{(j)}$ を代入すると定義から明らかに $a_j(\alpha_1^{(j)}, \cdots, \alpha_{n_{f_j}}^{(j)}) = 0$ となる．故に $1 = 0$ となり矛盾する．

故に選択公理より $I \subset \mathfrak{m} \subsetneq k[X]$ なる極大イデアル $\mathfrak{m}$ が存在する．$\overline{k} := k[X]/\mathfrak{m}$ と置く．$\overline{k}$ は自然に k の拡大体とみなせる．明らかに $\overline{k}/k$ は代数拡大である．

$\overline{k}$ が代数閉体でないと仮定する．2 次以上の既約多項式 $f \in \overline{k}[x]$ が存在する．$L := \overline{k}[x]/(f)$ と置けば $L/\overline{k}$ は有限次拡大で f の根 $\alpha \in L$ を含む．勿論 α は $\overline{k}$ 上代数的で，故

に k 上代数的でもある．従って $g(\alpha)=0$ となる多項式 $g\in k[x]$ が存在する．このとき g は $\overline{k}[x]$ で完全に分解するから $\alpha\in\overline{k}$ となる．これは f が 2 次以上の既約多項式であることに矛盾する．故に $\overline{k}/k$ は代数閉包である．

次に一意性を示す．Ω/k も代数閉包であるとする．

$$A:=\{\langle K,\varphi\rangle \mid k\subset K\subset\overline{k} \text{ は中間体，} \varphi\colon K\to\Omega \text{ は体の射 }\}$$

として A に順序関係 $\leq$ を

$$\langle K,\varphi\rangle\leq\langle L,\psi\rangle \Longleftrightarrow K\subset L,\ \psi|_K=\varphi$$

で定める．Zorn の補題により A は極大元 $\langle K,\varphi\rangle$ を持つ．極大性から $K=\overline{k}$ である．また $\varphi(\overline{k})$ は明らかに代数閉体だから，$\varphi(\overline{k})\subset\Omega$ より $\varphi(\overline{k})=\Omega$ が分かる．故に $\varphi\colon\overline{k}\to\Omega$ は同型である． □

この命題は ZF では証明できないことが知られている．但し，体 k の濃度を可算に制限すれば，代数閉包の「存在」は ZF で証明できる．

命題 2. 濃度が可算な体 k に対し代数閉包 $\overline{k}/k$ が存在する．

証明. 全単射 $\varphi\colon\mathbb{N}\to k$ を取る．$\alpha_n:=\varphi(n)$ と書く．

$$\begin{aligned}A_n&:=\{\alpha_{i_n}x^n+\cdots+\alpha_{i_1}x+\alpha_{i_0}\in k[x]\mid 0\leq i_j\leq n\}\\ B_n&:=A_n\setminus(A_0\cup\cdots\cup A_{n-1})\end{aligned}$$

と置くと $k[x]=\bigsqcup_{n=0}^{\infty}B_n$ であり，各 B_n は有限集合で，辞書式に順序を入れることができる．よって $k[x]$ は可算集合である．従って

$$A:=\{f\in k[x]\mid f \text{ は既約多項式，最高次係数は } 1\}$$

も可算だから全単射 $\psi\colon\mathbb{N}\to A$ が得られる．$f_n:=\psi(n)$ と置く．$K_0:=k$ として K_{n+1}/K_n を $f_n\in k[x]$ の最小分解体とする．$\overline{k}:=\bigcup_{n=0}^{\infty}K_n$ とすれば $\overline{k}/k$ は代数閉包である． □

※ 多項式から最小分解体を得る定まった方法があるため，$\{K_n\}_n$ の定義には選択公理は必要ないことに注意する．

参考文献

[1] Bernhard Banaschewski, Algebraic Closure without Choice, Mathematical Logic Quarterly 38 (1992), 383–385, http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/malq.19920380136/abstract