

選択公理について

alg-d

<http://alg-d.com/math/ac/>

2012年3月15日

定義. X を集合とすると、次の条件を満たす写像 $f: X \rightarrow \bigcup_{x \in X} x$ を集合 X の選択関数という.

任意の非空集合 $x \in X$ に対して $f(x) \in x$

次の命題を選択公理と呼ぶ.

選択公理. 任意の集合は選択関数を持つ.

定義. 全射 $g: \Lambda \rightarrow A$ を Λ を添え字集合とする集合族という. $X_\lambda := g(\lambda)$ と置いて、この集合族を $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ で表すことが多い. また、次の条件を満たす写像 $f: \Lambda \rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ を集合族 $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の選択関数という.

任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $f(\lambda) \in X_\lambda$

集合族 $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の選択関数全体からなる集合を $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ で表す. $f \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ に対して $x_\lambda := f(\lambda)$ と置くと、 $f = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ 等と表すことがある.

定理 1. 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 選択公理
2. 非空集合の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して、選択関数が存在する.
3. 互いに素な非空集合の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して、選択関数が存在する.
4. 非空集合の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して、 $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$.
5. 互いに素な非空集合の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して、 $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$.

6. 互いに素な非空集合の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して, ある集合 C が存在して「任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $|X_\lambda \cap C| = 1$ 」を満たす. この C を選択集合という.

証明. (1 \implies 2) 集合 $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ の選択関数を g とすれば $f(\lambda) := g(X_\lambda)$ が $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の選択関数である.

2 \implies 3 と 3 \implies 5 と 2 \implies 4 と 4 \implies 5 は明らか.

(5 \implies 6) $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を互いに素な非空集合の族とする. 仮定 5 により元 $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ が取れる. このとき $C := \{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ と置けばよい.

(6 \implies 1) X を任意の集合とする.

(i) $\emptyset \notin X$ のとき.

$Y := \{\{x\} \times x\}_{x \in X}$ とすれば Y は互いに素な非空集合の族であるから, 選択集合 C が存在する. このとき $x \in X \setminus \{\emptyset\}$ に対して $C \cap (\{x\} \times x) = \{\langle x, f(x) \rangle\}$ と表せば f が X の選択関数である.

(ii) $\emptyset \in X$ のとき.

$X_0 := X \setminus \{\emptyset\}$ に対して (i) の議論を行い X_0 の選択関数 f を得る. $a \in X$ を一つ取り, f を $f(\emptyset) := f(a)$ として f の定義域を X に拡張すれば, この f が X の選択関数である. □