選択公理が証明できないこと

alg-d
Mathematics Advent Calendar 2013

2013 年 12 月 26 日

目次

0　導入

この PDF の目標は「選択公理が証明できないことの証明」の雰囲気を伝えることである．あくまで雰囲気なので，怪しいことが書いてある部分が存在することを予め断っておく．まず基本的な記号等について確認しておく．

- x を自由変数とする論理式 (論理式を知らない場合は，命題のことだと思えばよい) $\varphi(x)$ に対して $\{x \mid \varphi(x)\}$ をクラスと呼ぶ．勿論これは集合とは限らないが，この PDF では特に気にする必要はない．(ある程度の範囲であれば集合論 (ZF 等を指している) でもクラスを扱うことが可能であることが知られている．)
- 論理式 $x = x$ に対するクラスを $V := \{x \mid x = x\}$ と書き，集合論の宇宙と呼ぶ．どんな x も $x = x$ を満たす (等号公理) から，V は要するに「全ての集合の集まり」であり，真のクラス (集合にならないクラス) の最も有名な例である．この PDF では，V と書いたら常にこれを表す．
- 論理式の集合を公理系と呼ぶ．公理系 T と論理式 φ に対して，「T から φ が証明できること」を $T \vdash \varphi$ で表す．(「証明できる」の定義を書いていないが，ここでは日常的な「証明」を想定してもらえれば問題ない．)
- ある論理式 φ に対して $T \vdash \varphi \wedge (\neg\varphi)$ となるとき，公理系 T は矛盾するという．矛盾していないとき無矛盾 (consistent) であるといい，$\mathrm{Con}(T)$ で表す．
- 公理系 T と論理式 φ について「$T \nvdash \varphi \iff \mathrm{Con}(T + \neg\varphi)$」が成り立つ．
- 論理式 φ とクラス M に対して，φ^M で「変数の動く範囲を M に制限した論理式」を表す．つまり，φ が「$\forall x \exists y$〜〜〜」というような論理式であれば φ^M は「$\forall x \in M \exists y \in M$〜〜〜」となる．(正式な定義は論理式の構造に関する帰納法による．)
- 選択公理 AC とは論理式

  $$\forall X \exists f (f \colon X \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow \bigcup X \text{ は写像} \wedge \forall x \in X \setminus \{\emptyset\} (f(x) \in x))$$

  である．ここで $\bigcup X := \bigcup_{x \in X} x$.

さて，この PDF の目標は $\mathsf{ZF} \nvdash \neg\mathrm{AC}$ を示すことであった．つまり $\mathrm{Con}(\mathsf{ZF} + \neg\mathrm{AC})$ を示せばよい．ところが不完全性定理により，これは証明できないことが知られている．そこで，代わりに $\mathrm{Con}(\mathsf{ZF}) \Longrightarrow \mathrm{Con}(\mathsf{ZF} + \neg\mathrm{AC})$ を示すことにする．その為には次の定理が使われる．

定理． T を公理系とする．あるクラス $M \neq 0$ に対して

$$\text{任意の}\ \varphi \in T\ \text{に対して}\ \mathsf{ZF} \vdash \varphi^M \text{である}$$

が成り立つとする．このとき $\mathrm{Con}(\mathsf{ZF}) \Longrightarrow \mathrm{Con}(T)$ である．

証明． (読み飛ばしてよい．) 対偶を示す．T が矛盾しているとする．即ちある φ が存在して $T \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$ である．証明中に使われる公理の数は有限個だから，ある $\psi_1, \ldots, \psi_n \in T$ が存在して $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$ とできる．このとき $\emptyset \vdash \psi_1^M \wedge \cdots \wedge \psi_n^M \to (\varphi \wedge \neg\varphi)^M$ が分かる．今仮定より ZF $\vdash \psi_i^M$ だから ZF $\vdash (\varphi \wedge \neg\varphi)^M = \varphi^M \wedge \neg\varphi^M$ となり ZF が矛盾する． □

よって，$\mathrm{Con}(\mathsf{ZF}) \Longrightarrow \mathrm{Con}(\mathsf{ZF} + \neg\mathrm{AC})$ を示すためには部分クラス $U \subset V$ を定義して，U が「ZF の公理は満たすが選択公理を満たさない」ようにすればよい．即ち「$\varphi \in \mathsf{ZF}$ に対して ZF $\vdash \varphi^U$ かつ ZF $\vdash (\neg\mathrm{AC})^U$」となればよい．ここで $(\neg\mathrm{AC})^U = \neg(\mathrm{AC}^U)$ であり，AC^U とは

$$\forall X \in U \exists f \in U (f\colon X \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow \bigcup X\ \text{は写像} \wedge \forall x \in X \cap U \setminus \{\emptyset\}(f(x) \in x))$$

ということである．よって，ある集合 $X \in V$ に対して上手く U をつくり，「$X \in U$ であるが X のどんな選択関数 f についても $f \notin U$」となればよい．このような U を得るため，まずはそのアイデアを説明する．

1　アイデア

我々の目標は部分クラス $U \subset V$ を定義して，U が「ZF の公理は満たすが選択公理を満たさない」ようにすることだった．ただこの U は ZF は満たすようにしなければならないので，単に $U := V \setminus \{f \mid f\ \text{は}\ X\ \text{の選択関数}\}$ 等とするのでは駄目である．例えば，$\bigcup X$ の整列順序 $\leq$ があると，これを使って選択関数 f を構成することが (ZF の公理を使って) できるから，U が ZF を満たしつつ X の選択関数を含まないようにするためには U が $\bigcup X$ の整列順序も含まないようにしなければならない．

ここで，「靴下選択公理」という話をしよう．これは，もし X が靴の集まりだったら，つまり

$X = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}, \qquad A_n = \Big\{$  $\Big\}$

だったら，X の選択関数は簡単に構成できる (例えば各 A_n から右足の靴を取ればよい)

が，X が靴下の集まりだったら，つまり

$$X = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}, \qquad A_n = \left\{ \quad \right\}$$

だったら，X の選択関数を構成するのは難しいだろう，という話である．靴下は左右の区別が付かないので，どちらを選択すればいいか分からないのである．

つまり，選択関数がないような A_n は《対称性が高い》と言える．逆に，選択関数そのものは《対称性が低い》と考えられる．(もし靴下の選択関数があれば，靴下を「選択関数で選ばれた方」と「選ばれなかった方」で区別できるから)

そこで，$U \subset V$ を $U := \{x \mid x$ は《対称性が高い》$\}$ と定める．こうすると U には選択関数が入らない上に，U は ZF の公理を満たすのである．(《対称性が高い》集合から集合演算で作られる集合は《対称性が高い》から，ZF が成り立つ．)

では,《対称性が高い》とは何か，というと我々は《対称性》というものを扱うための物を知っている．それは自己同型群である．そこで自己同型写像 $g\colon V \longrightarrow V$ を考えよう．(V は集合ではないので，g も通常の意味の写像ではないのだが，まあ普通の写像と同じだと思ってよい．) V には $\in$ という構造だけが入っているから，全単射 $g\colon V \longrightarrow V$ が同型であるとは

$$x \in y \Longleftrightarrow g(x) \in g(y)$$

となることである．ところが，次の命題が成り立ってしまう．

命題. 自己同型 $g\colon V \longrightarrow V$ は $g = \mathrm{id}_V$ しか存在しない． □

というわけで，自己同型を利用するというアイデアはこのままでは実行できない．ではどうするか? そのために使用するのが強制法 (Cohen, 1963) である．しかし，これは難しい．そこで，まずは 1922 年 (!?) に Fraenkel によって得られていた「選択公理が証明できないことの証明」を行う．

2 ZFA

ZFA とは「アトム付き集合論」の公理系である．アトム (もしくは urelement) とは，集合でないもののことである．ZF では「全てのものが集合」であるが，集合でないものの存在も許したバージョンの ZF が ZFA である．Fraenkel が 1922 年に示したのは $\mathrm{Con}(\mathsf{ZFA}) \Longrightarrow \mathrm{Con}(\mathsf{ZFA} + \neg\mathrm{AC})$ なのである．

ZFA は ZF とほぼ同じであるが，以下のような点が ZF と異なる．

- アトム全体がなす集合を A と書く．(A が集合とは仮定しないこともあるが今回は集合と仮定する)
- $a \in A$ ならば $\forall x(x \notin a)$ である．しかし $a \neq \emptyset$ である．
- 外延性公理
$$\forall x \forall y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$$
は
$$\forall x \forall y((x \notin A \wedge y \notin A) \to (\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y))$$
と修正する．(つまり変数 x, y の動く範囲を集合に制限する．)
- 他の公理も同様にして，適当に修正する．
- このとき，ZFA $+ A = \emptyset$ が ZF になる．

3 Permutation モデル

全単射 $A \longrightarrow A$ の全体がなす群を $\mathrm{Aut}(A)$ と書くことにする．$g \in \mathrm{Aut}(A)$ とする．任意の $x \in V$ に対して $g(x) := \{g(y) \mid y \in x\}$ と定義する．

※ これはもう少し詳しく言えば「帰納的」な定義である．つまり，まず $a \in A$ に対しては $g(a)$ が定まっている．そこで $x \in \mathcal{P}(A)$ に対して $g(x) := \{g(a) \mid a \in x\}$ と定義することができる．すると $X \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ に対して $g(X) := \{g(x) \mid x \in X\}$ が定義される．これを繰り返して行くことで，全ての $x \in V$ に対して $g(x)$ が定まるのである．

このとき次が成り立つ．

命題. (1) $g\colon V \longrightarrow V$ は自己同型である．即ち $x \in y \leftrightarrow g(x) \in g(y)$ となる．よって，先に述べた「自己同型を使う」というアイデアを実行することができるのである．

(2) $g(\{x, y\}) = \{g(x), g(y)\}$

(3) $g(\langle x, y\rangle) = \langle g(x), g(y)\rangle$

$\because$) $\langle x, y\rangle := \{\{x\}, \{x, y\}\}$ だったから $g(\langle x, y\rangle) = \{\{g(x)\}, \{g(x), g(y)\}\} = \langle g(x), g(y)\rangle$ となる．

(4) 写像 f に対して $g(f)(x) = g(f(g^{-1}(x)))$

$\because$) $f = \{\langle x, f(x)\rangle \mid x \in X\}$ と書けば $g(f) = \{\langle g(x), g(f(x))\rangle \mid x \in X\}$ だか

ら $g(f)(g(x)) = g(f(x))$.

(5) 自然数 n に対して $g(n) = n$.

$\because$) 自然数の定義が $0 := \emptyset$, $1 := \{0\}$, $2 := \{0,1\}$, $3 := \{0,1,2\}$, $\cdots$ だったことを思い出そう．すると帰納的に $g(0) = 0$, $g(n) = \{g(0), g(1), \ldots, g(n-1)\} = \{0, 1, \ldots, n-1\} = n$ が分かる．

定義. $G \subset \mathrm{Aut}(A)$ を部分群とする．以下の条件を満たす $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(G)$ を G の normal フィルターという．

(1) 各 $H \in \mathcal{F}$ は部分群 $H \subset G$ である．
(2) $H \in \mathcal{F}$, $H \subset K$ で $K \subset G$ が部分群ならば $K \in \mathcal{F}$.
(3) $H, K \in \mathcal{F}$ ならば $H \cap K \in \mathcal{F}$.
(4) $H \in \mathcal{F}$, $g \in G$ ならば $gHg^{-1} \in \mathcal{F}$.
(5) $a \in A$ に対して $\{g \in G \mid g(a) = a\} \in \mathcal{F}$

$G \subset \mathrm{Aut}(A)$ と G の normal フィルター $\mathcal{F}$ が与えられたとき，$\mathrm{sym}(x) := \{g \in G \mid g(x) = x\}$ として $U := \{x \mid \mathrm{sym}(x) \in \mathcal{F},\ \forall y \in x (y \in U)\}$ と置く．

※ これの U の定義も，g の様に帰納的な定義になっている．

※ ここで, この定義の意味を考えてみる．まず $\mathrm{sym}(x)$ であるが, $\mathrm{sym}(x)$ は $g(x) = x$ となる g の集合，という定義だからこれは「x がどのくらい対称性を持っているか」を表すと考えることができる．次に，normal フィルター $\mathcal{F}$ であるが，フィルターと言うのは「大きいものを判別するための数学的な概念」である．つまり $H \in \mathcal{F}$ となる H は大きいと見なせるのである．よって U の定義の $\mathrm{sym}(x) \in \mathcal{F}$ というのは「x の対称性は大きい」という意味になる．つまり U は「対称性が大きい x 全体」のようなものになっているのである．

命題. $\mathbb{N} \subset U$, $\mathbb{N} \in U$, $A \subset U$, $A \in U$ である．

証明. まず $\mathbb{N} \subset U$ を示す．$n \in \mathbb{N}$ を取る．まず既に示したように，$g \in G$ に対して $g(n) = n$ だから，$\mathrm{sym}(n) = G \in \mathcal{F}$ である．$n = 0$ の時は $\forall y \in 0 (y \in U)$ は自明 (0 は空集合だから) なので $0 \in U$ が分かる．よって帰納的に $1 \in U$, $2 \in U$, $\ldots$, $n \in U$, $\ldots$ が分かる．即ち $\mathbb{N} \subset U$ である．

次に $\mathbb{N} \in U$ であるが、自然数 n のときと同様にして $\mathrm{sym}(\mathbb{N}) = G \in \mathcal{F}$ が分かり，また $\forall n \in \mathbb{N}(n \in U)$ は既に示したから $\mathbb{N} \in U$ となる．

次に $A \subset U$ を示すため，$a \in A$ を取る．normal フィルターの定義から $\mathrm{sym}(a) \in \mathcal{F}$ である．また a はアトムだから $y \in a$ は存在しないので $\forall y \in a(y \in U)$ が成り立つ．よって $a \in U$ となる．

最後に $A \in U$ について．明らかに $\mathrm{sym}(A) = G \in \mathcal{F}$ であり，また $\forall a \in A(a \in U)$ だったから $A \in U$ が分かった． □

定理. U は ZFA の公理を満たす．(即ち，任意の $\varphi \in$ ZFA に対して ZFA $\vdash \varphi^U$) □

この U を permutation モデルと呼ぶ．あとは $\mathcal{F}$ を上手くとって，U で選択公理が成り立たなければ (即ち ZFA $\vdash (\neg \mathrm{AC})^U$ とできれば) よいわけである．

normal フィルター $\mathcal{F}$ は通常以下のようにして構成される．

定義. 以下の条件を満たす $I \subset \mathcal{P}(A)$ を A の normal イデアルという．

(1) $E \in I$，$F \subset E$ ならば $F \in I$.
(2) $E, F \in I$ ならば $E \cup F \in I$.
(3) $E \in I$，$g \in G$ ならば $\{g(x) \mid x \in E\} \in I$.
(4) $a \in A$ に対して $\{a\} \in I$.

集合 x に対して $\mathrm{fix}(x) := \{g \in G \mid$ 任意の $y \in x$ に対して $g(y) = y\}$ と書く．normal イデアル I に対して，$\mathcal{F} := \{H \subset G:$ 部分群 $\mid$ ある $E \in I$ に対して $\mathrm{fix}(E) \subset H\}$ は normal フィルターである (読者の演習問題とする)．これにより permutation モデル U が定まる．このとき，$x \in U$ とすると $\mathrm{fix}(E) \subset \mathrm{sym}(x)$ となる $E \in I$ が存在する．このような E を x の support と呼ぶ．

さて，いよいよ permutation モデルの具体的構成に入る．

モデル 1 (The Second Fraenkel Model)**.** A は可算無限とする．$A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ と書く．$X_n := \{a_n, b_n\}$，$Y := \{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ とする．$\pi_n \colon A \longrightarrow A$ を

$$\pi_n(a) = \begin{cases} b_n & (a = a_n) \\ a_n & (a = b_n) \\ a & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

と定めて，G を $\{\pi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ で生成される群とする．(我々は a_n と b_n の区別が付かないような U を作りたいので，a_n を b_n へ写すような自己同型だけを集めてそれを G とするのである．) $I := \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(A) = \{E \subset A \mid |E| < \infty\}$ は normal イデアルである．よって

permutation モデル U が定まる．$X_n, Y \in U$ である．

∵) 任意の $g \in G$ に対して $g(X_n) = X_n$，$g(Y) = Y$ だから $\mathrm{sym}(X_n) = G \in \mathcal{F}$，$\mathrm{sym}(Y) = G \in \mathcal{F}$ である．既に示したように $A \subset U$ だったから，$\forall y \in X_n (y \in U)$ は成立する．故に $X_n \in U$ である．よって $\forall y \in Y (y \in U)$ も成立し，$Y \in U$ となる．

Y が選択関数 $f \colon \mathbb{N} \longrightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ を持ち，$f \in U$ であると仮定する．f の support を $E \subset A$ とする．$E = \{a_1, b_1, a_2, \ldots, b_{n-1}\}$ としてよい．このとき $\pi_n \in \mathrm{fix}(E)$ だから $\pi_n(f) = f$ である．簡単のため $f(n) = a_n$ とする．このとき $\pi_n(f)(n) = f(n) = a_n$ であるが，一方 $\pi_n(f)(n) = \pi_n(f(\pi_n^{-1}(n))) = b_n$ であるから矛盾する．

故に Y は選択関数 $f \in U$ を持たない．即ち U は選択公理を満たさない．以上により，選択公理が証明できないことが分かった．

これでこの節の目標は達成されたのであるが，折角なのでもっと他の permutation モデルも作ってみよう．

モデル 2 (The Basic Fraenkel Model)**.** A を可算無限として $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ と書く．$G = \mathrm{Aut}(A)$ とする．normal フィルター $I := \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(A)$ により permutation モデル U が定まる．この U を使うと，色々なことが証明できないと分かる．

まず $B \subset A$ を部分集合とするとき，$|B| < \infty$ または $|A \setminus B| < \infty$ である．(以下，一々断らないが，これは「U の中で」の話である．)

∵) $|B| = \infty$ とする．B の support を E とする．$E = \{a_n \mid n < m\}$ としてよい．$a \in B \setminus E$ を一つ取る．任意の $n \geq m$ に対して $g(a) = a_n$ となる $g \in \mathrm{fix}(E)$ が存在する．故に $a_n \in g(B) = B$ である．よって $A \setminus E \subset B$ となり $|A \setminus B| < \infty$ である．

よって特に A は可算無限部分集合を持たない．即ち $\aleph_0 \not\leq |A|$ となる．従って $|A| \neq |A \times A|$ である．

$\langle K, +, \cdot \rangle$ を $A \subset K$ なる標数 0 の体とする．代数閉包 $\bar{K}/K$ が存在すると仮定する．$\langle \bar{K}, +, \cdot \rangle$ の support を E とする．$a, b \in A \setminus E$，$a \neq b$ を取り $g \in G$ を $g(a) = b$，$g(b) = a$，$g(x) = x$ とする．$g \in \mathrm{fix}(E)$ である．よって g は自己同型 $\bar{K} \longrightarrow \bar{K}$ となる．$z := \sqrt{a - b} \in \bar{K}$ とすれば $g(z) = \sqrt{g(a) - g(b)} = \sqrt{b - a} = iz$ だから

$$i = g(i) = g\left(\frac{g(z)}{z}\right) = \frac{g(g(z))}{g(z)} = \frac{z}{g(z)} = \frac{1}{i}.$$

故に $-1 = 1$ となり矛盾する．従って代数閉包の存在は ZFA で証明できないことが分

かる．

容易に分かるように $\bigl\{\{a,b\} \bigm| a,b\in A\bigr\}$ は選択関数を持たない．故に A は全順序付けできない．

モデル 3 (Läuchli/Jech Model)**.** $A=B\cup C$，$B=\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$，$C=\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$，$B_n=\{b_{n1},\cdots,b_{n6}\}$，$C_n=\{c_{n1},\cdots,c_{n6}\}$ とする．

置換 $\in S_6$ を以下のように定める．

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= (12)(34)(5)(6) & \alpha_2 &= (12)(34)(5)(6)\\
\beta_1 &= (13)(24)(5)(6) & \beta_2 &= (12)(3)(4)(56)\\
\gamma_1 &= (14)(23)(5)(6) & \gamma_2 &= (1)(2)(34)(56)
\end{aligned}$$

$\alpha\in\mathrm{Aut}(A)$ を B_n 上 α_1 のように，C_n 上 α_2 のように作用するものとする．$\beta,\gamma\in\mathrm{Aut}(A)$ も同様に定める．

$$G=\{g\in\mathrm{Aut}(A)\mid 各\, n\in\mathbb{N}\, について\, g|_{B_n\cup C_n}=1,\alpha,\beta,\gamma\}$$

として $I:=\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(A)$ により permutation モデル U を取る．X を B を基底とする実線型空間，Y を C を基底とする実線型空間とすれば $X\cong Y$ である．

∵) X_n,Y_n を B_n,C_n を基底とする 6 次元実線型空間とする．線型写像 $f_n\colon X_n\longrightarrow Y_n$ を，次の行列により定める．

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&1&1&0\\
0&1&1&0&1&0\\
1&0&1&0&0&1\\
0&1&0&1&0&1\\
1&1&0&0&1&1\\
0&0&1&1&1&1
\end{pmatrix}$$

この行列の行列式は -8 となるので，f_n は同型である．$X\cong\bigoplus X_n$，$Y\cong\bigoplus Y_n$ だから，f_n から同型 $f\colon X\longrightarrow Y$ が得られる．また計算すれば $\alpha_2(f(\alpha_1(x)))=f(x)$，$\beta_2(f(\beta_1(x)))=f(x)$，$\gamma_2(f(\gamma_1(x)))=f(x)$ となることがわかる．故に任意の $g\in G$ に対して $g(f)=f$ である．よって $f\in U$．

しかし $|B|\neq|C|$ である．

∵) $\aleph_0\leq|B|$ かつ $\aleph_0\not\leq|C|$ を示せばよい．

まず $f\colon\omega\longrightarrow B$ を $f(n):=b_{n6}$ で定める．このとき明らかに $f\in U$ で f は単射

だから $\aleph_0 \leq |B|$ である．

次に $f\colon \omega \longrightarrow C$ が単射で $f \in U$ とする．f の support を E とする．$E = C_0 \cup \cdots \cup C_{n-1}$ としてよい．f が単射だから，ある $m \in \omega$ が存在して $f(m) \notin E$ となる．簡単のため，$f(m) = c_{k1}$ とする．$k \geq n$ である．このとき $g \in G$ を $g|_E = \mathrm{id}$, $g|_{C_k} = \alpha_2$ とすれば $g(f) = f$ だから $c_{k1} = f(m) = g(f)(m) = g(f(m)) = g(c_{k1}) = \alpha_2(c_{k1}) = c_{k2}$ となり矛盾する．

以上により，線型空間の基底の濃度の一意性は ZFA で証明できないことが分かる．

モデル 4 (Läuchli Model II)**.** ZFA + ¬Urysohn のモデルを構成する．A を可算として，$(A, \leq) \cong (\mathbb{Q}, \leq)$ となる A の順序 $\leq$ を取る．G を $(A, \leq)$ の順序同型全体とする．

$$I := \left\{ E \subset A \;\middle|\; \begin{array}{l} E \text{ は高々有限個しか集積点を持たない} \\ \text{かつ任意の無限部分集合 } S \subset E \text{ は集積点を持つ} \end{array} \right\}$$

とすると，I は normal イデアルとなる．I により permutation モデル U を定める．

$g \in G$ とすれば $a \leq b \Longleftrightarrow g(a) \leq g(b)$ だから $g(\leq) = \leq$ である．故に $\mathrm{fix}(\leq) = G$ だから $\leq \in U$ となる．よって $(A, \leq) \in U$ であり，A に順序位相が入る．このとき A は T_4 空間である．

∵) 証明略

しかし連続関数 $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ は定数関数しかない．

∵) まず A が Dedekind の切断公理を満たすことを示す．$\langle B, C \rangle \in U$ を A の切断とし，$\max B$ も $\min C$ も存在しないと仮定する．E を B の support とする．E は集積点を有限個しかもたないから，閉区間 $I \subset A$ で $I \cap B \neq \emptyset$, $I \cap C \neq \emptyset$，かつ I は E の集積点を含まないようにできる．E の無限部分集合は集積点をもつから，$|I \cap E| < \infty$ でなければならない．従って初めから $I \cap E = \emptyset$ としてよい．このとき $g \in G$ を $A \setminus I$ 上恒等写像となるようにとれば $g \in \mathrm{fix}(E)$ である．故に $g(B) = B$ とならなければならないが，明らかに $g(B) \neq B$ となるような g が存在し，矛盾する．従って $\max B$ か $\min C$ が存在し，Dedekind の切断公理が成り立つ．故に A では中間値の定理が成り立つ．

連続関数 $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ が定数関数でないと仮定する．すると中間値の定理から，ある $s, t \in \mathbb{R}$, $s < t$ が存在して $[s, t] \subset f(A)$ となる．即ち $|f(A)| = 2^{\aleph_0}$ であるが，一方 $|A| = \aleph_0$ だったから矛盾する．従って f は定数関数である．

即ち Urysohn の補題は ZFA で証明できない.

4 Embedding Theorem

最後に，次の定理の雰囲気を紹介して終わる.

定理 (Embedding Theorem(雰囲気)). φ がある条件を満たすとする．ZFA $+ \varphi$ の permutation モデルが作れれば，ZF $+ \varphi$ の「symmetric モデル」と呼ばれるものが作れる.

symmetric モデルというのは，強制法によって作るバージョンの permutation モデルみたいなものである．この定理により，多くの場合は permutation モデルを作ることに帰着されるのである.

これが成り立たない φ としては例えば AMC $+ \neg$AC がある．ZFA では AMC $\not\Rightarrow$ AC であり，ZFA $+$ AMC $+ \neg$AC の permutation モデルが存在するが，ZF では AMC $\Leftrightarrow$ AC となるからである.

この定理を満たす φ は例えば $\neg$(Urysohn)，$\neg$(線型空間の基底の濃度の一意性)，$\neg$(代数閉包の存在) などで，これらの permutation モデルは今回作ったので，Embedding Theorem を適用すれば ZF での結果も得られるのである.

参考文献

[1] ケネス・キューネン,『集合論-独立性証明への案内』, 藤田博司訳, 日本評論社, 2008

[2] Thomas J. Jech, the Axiom of Choice, Dover Books on Mathematics, 2008